

# Ελάχιστος βαθμός και εμβυθίσεις πλήρων γραφημάτων

Μάρθα Οικονόμου  
AL180009

Εξεταστική επιτροπή:  
Αρχοντία Χ. Γιαννοπούλου, Επίκουρη  
Καθηγήτρια, Τμήμα Πληροφορικής και  
Τηλεπικοινωνιών, Ε.Κ.Π.Α.  
Δημήτρης Ζώρος, Διδάκτωρ,  
Εξωτερικός Συνεργάτης, ΑΑΜΑ.  
Σταύρος Κολλιόπουλος, Καθηγητής,  
Τμήμα Πληροφορικής και  
Τηλεπικοινωνιών, Ε.Κ.Π.Α.

Επιβλέπουσα:  
Αρχοντία Χ. Γιαννοπούλου,  
Επίκουρη Καθηγήτρια,  
Τμήμα Πληροφορικής και  
Τηλεπικοινωνιών,  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών.



Η παρούσα Διπλωματική Εργασία  
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών  
για την απόκτηση του  
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης  
«Αλγόριθμοι, Λογική και Διακριτά Μαθηματικά»  
που απονέμει το  
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών  
του  
Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Εγκρίθηκε την ..... από Εξεταστική Επιτροπή  
αποτελούμενη από τους:

Όνοματεπώνυμο

Βαθμίδα

Υπογραφή

1. Αρχοντία Χ.  
Γιαννοπούλου

Επίκουρη  
Καθηγήτρια  
(Επιβλέπουσα)

2. Σταύρος  
Κολλιόπουλος

Καθηγητής

3. Δημήτρης  
Ζώρος

Διδάκτωρ



Η ολοκλήρωση της Διπλωματικής Εργασίας  
χρηματοδοτήθηκε από το ΙΚΥ στο πλαίσιο του  
"προγράμματος χορήγησης υποτροφιών  
για μεταπτυχιακές σπουδές πρώτου κύκλου (Master)  
στην Ελλάδα με ένταξη στην αγορά εργασίας,  
στο πλαίσιο συνεργασίας του  
Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ)  
και της  
Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος (ΕΤΕ),  
ακαδημαϊκού έτους 2018-2019".



Pure mathematics is, in its way,  
the poetry of logical ideas.

---

*Albert Einstein*

Every dance is a kind of fever  
chart, a **graph** of the heart.

---

*Martha Graham*

Some men see things as they  
are, and ask **why**.

I dream of things that never  
were, and ask **why not**.

---

*Robert Kennedy*

Αφιερώνω την εργασία αυτή στον  
πρώτο μου Δάσκαλο μαθηματικών,  
τον Πατέρα μου.





In this thesis, all graphs are finite and may have loops and multiple edges. Let  $uw$  and  $wv$  be two distinct adjacent edges in a graph  $G$ . To *lift* the edges  $uw$  and  $wv$ , is to delete them from  $G$  and add a new edge  $uv$ . A graph  $G$  is said to contain an  $H$ -immersion, if a graph isomorphic to  $H$  can be obtained from a subgraph of  $G$  by lifting pairs of edges (and possibly removing isolated vertices).

The classical conjecture of Hadwiger relates the clique minor containment in a graph  $G$  and the chromatic number  $\chi(G)$  of  $G$ . Hadwiger's conjecture [20] states that every loopless graph without a  $K_t$ -minor is  $(t - 1)$ -colourable, suggesting a far-reaching generalization of the Four-Colour Theorem. It remains one of the deepest open problems in Graph Theory. Consequently, relations between the chromatic number of a graph  $G$  and the largest size of a complete graph contained in  $G$  attracted a lot of interest. Regarding immersion, the conjecture of Abu-Khzam and Langston states that the graph  $K_t$  can be immersed in any  $t$ -chromatic graph.

A variant of this regards the minimum degree of a graph instead of the chromatic number as follows: Let  $d(t)$  be the smallest integer such that every simple graph of minimum degree at least  $d(t)$  contains an immersion of  $K_t$ , then  $d(t) = t - 1$ . In this thesis, we analyse the proof for the values  $t \in \{5, 6, 7\}$  (as proven in [9] by DeVos, Kawarabayashi, Mohar and Okamura). Furthermore, we study the reason the conjecture does not hold for  $t \in \{8, 9, 11\}$  (as proven in [7]) along with a counterexample of Seymour [22] for  $t = 10$  resulting that  $d(t) \geq t$  for  $t \geq 10$ . Finally, two upper bounds are presented, one of the function  $d(t)$  regarding strong immersions (published in [8]) showing that  $d(t) \leq 200t$  and another one for weak immersions (published in [17]) indicating that  $d(t) \leq 7t + 7$ .

**Keywords and phrases:** Hadwiger's conjecture, Immersion, Complete graph, Clique



Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, όλα τα γραφήματα είναι πεπερασμένα και μπορεί να έχουν θηλιές και πολλαπλές ακμές. Έστωσαν  $uw$  και  $wv$  δύο ξεχωριστές γειτονικές ακμές σε ένα γράφημα  $G$ . Οι ακμές  $uw$  και  $wv$  καλούνται *ανυψωμένες*, όταν διαγράφονται από το  $G$  και προστίδεται μια νέα ακμή  $uv$  στη θέση τους. Λέγεται ότι ένα γράφημα  $G$  περιέχει μια *εμβύδιση*  $H$ , όταν ένα γράφημα ισομορφικό με το  $H$  μπορεί να σχηματιστεί από ένα υπογράφημα του  $G$ , ανυψώνοντας ζεύγη ακμών (και αφαιρώντας απομονωμένες κορυφές).

Η κλασική εικασία του Hadwiger συσχετίζει την ύπαρξη της κλίμακας ως έλασσον ενός γραφήματος  $G$  με τον χρωματικό αριθμό του  $\chi(G)$ . Ειδικότερα, η εικασία του Hadwiger [20] υποδηλώνει ότι κάθε γράφημα χωρίς θηλιά και  $K_t$ -έλασσον είναι  $(t-1)$ -χρωματίσιμο, αποτελώντας μια ευρεία γενίκευση του Θεώρηματος Τεσσάρων Χρωμάτων. Η εικασία αυτή παραμένει ακόμη ως ένα από τα ανοιχτά προβλήματα στη Θεωρία των Γραφημάτων. Κατά συνέπεια, οι σχέσεις μεταξύ του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος  $G$  και του μεγαλύτερου μεγέθους ενός πλήρους γραφήματος που περιέχεται στο  $G$  προσέλκυσαν πολύ ενδιαφέρον. Όσον αφορά τις εμβυδίσεις, η εικασία των Abu-Khzam και Langston υποδηλώνει ότι το πλήρες γράφημα  $K_t$  μπορεί να εμβυδιστεί σε οποιοδήποτε  $t$ -χρωματίσιμο γράφημα.

Μια παραλλαγή της, που αφορά τον ελάχιστο βαθμό αντί για τον χρωματικό αριθμό, είναι η εξής: Έστω  $d(t)$  ο μικρότερος ακέραιος έτσι ώστε κάθε απλό γράφημα ελάχιστου βαθμού τουλάχιστον  $d(t)$  να περιέχει μια εμβύδιση  $K_t$ , τότε  $d(t) = t-1$ . Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, αναλύεται η απόδειξη για τις τιμές  $t \in \{5, 6, 7\}$  (όπως αποδεικνύεται στο [9] από τους DeVos, Kawarabayashi, Mohar και Okamura). Επιπλέον μελετάται η απόδειξη ότι η εικασία δεν αληθεύει όταν  $t \in \{8, 9, 11\}$  (όπως αποδεικνύεται στο [7] από τις Collins και Heenean) καθώς και ένα αντιπαράδειγμα του Seymour [22] για  $t = 10$  που υποδεικνύει ότι  $d(t) \geq t$  για τιμές  $t \geq 10$  διαψεύδοντας την εικασία. Τέλος, παρουσιάζονται δύο άνω φράγματα της συνάρτησης  $d(t)$ , το πρώτο αφορά τις ισχυρές εμβυδίσεις (όπως δημοσιεύτηκε στο [8]) όπου  $d(t) \leq 200t$  και το δεύτερο σχετίζεται με τις ασθενείς εμβυδίσεις (όπως δημοσιεύτηκε στο [17]) όπου δείχνεται ότι  $d(t) \leq 7t + 7$ .

**Λέξεις-κλειδιά:** Εικασία του Hadwiger, Εμβύδιση, Πλήρες γράφημα, Κλίμα



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την περάτωση της μεταπτυχιακής διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλλαν στην εκπόνησή της. Πρώτη από όλους θέλω να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου, κυρία Αρχοντία Γιαννοπούλου, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε εξ' αρχής, την επιστημονική της καθοδήγηση, τις εποικοδομητικές υποδείξεις της καθώς και τις γνώσεις που αποκόμισα κατά την διάρκεια της συνεργασίας μας. Το αμείωτο ενδιαφέρον και προθυμία της με βοήθησε να ολοκληρώσω αυτήν την εργασία.

Οφείλω να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στον κύριο Δημήτρη Ζώρο και κύριο Σταύρο Κολλιόπουλο που αρχικά δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής αξιολόγησης της μεταπτυχιακής εργασίας μου και εν συνεχεία για τον αξιοσέβαστο χρόνο και υπομονή τους κατά τη διάρκεια τόσο της ανάγνωσης, όσο και της παρουσίασης της εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές μου για τις διορατικές συζητήσεις που είχαμε, καθ' όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού μου κύκλου και της ερευνητικής διαδικασίας. Σε τελική ανάλυση, αυτές οι συζητήσεις και παρουσιάσεις ήταν καθοριστικές για να κατανοήσουμε βαθιά τις μαθηματικές έννοιες στα χνάρια των αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών.

Επιπλέον, ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω σε όλο το "Θεότρελο" παρεάκι μου που με γεμίζει με ανάλαφρες και ξέγνοιαστες στιγμές για να ισορροπώ το διάβασμα και τη δουλειά. Ένα ακόμη ξεχωριστό ευχαριστώ στην παιδική μου φίλη και κουμπάρα, Λορένα, για όλη την (μουσική) υποστήριξη της και την θετική της ενέργεια, τονώντας έτσι την αυτοπεποίδηση μου.

Το πιο μεγάλο "ευχαριστώ" το κρατώ για τον σύζυγο μου Θεόδωρο Σουξέ για όλη την ηθική συμπαράστασή του, τη συνεχή υποστήριξη και πολύτιμη βοήθειά του, την αγάπη και αφοσίωση του, χωρίς τις οποίες δεν θα ήταν δυνατή η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Τέλος, νιώθω την ανάγκη να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου: τους γονείς μου Θανάση και Γεωργία και τα αδέρφια μου Δημήτρη, Ερικέττη και Γιάννη για όλη τη στήριξη, την στοργή και την κατανόησή τους, καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.



Abstract	i
Σύνοψη	iii
Ευχαριστίες	v
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Βασικές έννοιες της Θεωρίας Γραφημάτων . . . . .	1
1.2 Παραλλαγές της εικασίας του Hadwiger . . . . .	3
1.3 Εισαγωγικοί μαθηματικοί ορισμοί . . . . .	5
<b>2 Πλήρη γραφήματα ως εμβυθίσεις</b>	<b>11</b>
2.1 Γραφήματα με εμβυθίσεις $K_5, K_6, K_7$ . . . . .	12
<b>3 Εμβυθίσεις πλήρων γραφημάτων</b>	<b>25</b>
3.1 Γραφήματα χωρίς εμβυθίσεις $K_8, K_9, K_{11}$ . . . . .	25
3.1.1 Περίπτωση $t = 8$ . . . . .	30
3.1.2 Περίπτώσεις $t \geq 8$ . . . . .	31
3.2 Αντιπαράδειγμα $t = 10$ , Περίπτώσεις $t \geq 10$ . . . . .	36
<b>4 Ελάχιστος βαθμός και εμβυθίσεις</b>	<b>39</b>
4.1 Ισχυρές εμβυθίσεις . . . . .	39
4.2 Ασθενείς εμβυθίσεις . . . . .	48
<b>5 Συμπεράσματα</b>	<b>61</b>
Κατάλογος σχημάτων	62
Βιβλιογραφία	65





## 1.1 Βασικές έννοιες της Θεωρίας Γραφημάτων

Η Θεωρία Γραφημάτων πλαισιώνει τον κλάδο των μαθηματικών όπου μελετούνται τα γραφήματα. Ένα γράφημα αποτελείται από κορυφές και ακμές που συνδέουν τις κορυφές μεταξύ τους. Τα γραφήματα χρησιμοποιούνται ευρέως για να μοντελοποιήσουν και να αναπαραστήσουν σχέσεις μεταξύ διαφόρων στοιχείων σε διάφορους τομείς, όπως η κοινωνική δικτύωση, η πληροφορική, η βιολογία, η μηχανολογία, και η χημεία.

Η ενότητα αυτή των διακριτών μαθηματικών ασχολείται με τις ιδιότητες και τα προβλήματα διακριτών αντικειμένων και διμελών σχέσεων που σχετίζονται με αυτά. Η θεωρία γραφημάτων έχει εφαρμογές σε πολλούς τομείς, όπως οι αλγόριθμοι αναζήτησης, η ανάλυση κοινωνικών δικτύων, η δικτυακή ασφάλεια, και η ανάλυση δεδομένων.

Οι έρευνες, δημοσιεύσεις, και μελέτες που σχετίζονται με τις ιδιότητες των γραφημάτων οδηγούν σε ιδιαίτερες αξιολογικά συμπεράσματα, ελκύνοντας έτσι τον ενδιαφέρον ολό και περισσότερων ερευνητών ανά τον κόσμο. Τα γραφήματα σαν εργαλείο μας επιτρέπουν να μοντελοποιούμε διάφορα είδη δικτύων, ροών και δομών, όπως είναι τα συγκοινωνιακά δίκτυα, ο παγκόσμιος ιστός, αρκετές χημικές συνδέσεις και μηχανολογικά δίκτυα.

Στην προσπάθεια μας να κατανοήσουμε τη δομή των γραφημάτων και σχέση των διαφόρων εννοιών τους, καταφεύγουμε στα συνδυαστικά εργαλεία της Αλγοριθμικής Θεωρίας Γραφημάτων. Παραδέτονται πρόσφατα αποτελέσματα σχετικά με τις εμβυθίσεις [3] [15]. Οι Grohe, Kawarabayashi, Marx και Wollan απέδειξαν [19] το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 1.1.** Για κάθε συγκεκριμένο μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $H$ , υπάρχει ένας αλγόριθμος  $\mathcal{O}(f(H)|V(G)|^3)$  που αποφασίζει αν το  $H$  είναι εμβύδιση του  $G$ .

Στην σειρά των δημοσιεύσεων του άθλου τους, Graph Minors, οι Robertson και Seymour απέδειξαν ένα γενικό θεώρημα [26], που περιγράφει τη δομή των γραφημάτων που δεν περιέχουν ένα γράφημα ως έλασσον. Σχετικά με τη σχέση της εμβύθισης, ο Wollan απέδειξε δυο σημαντικά δομικά αποτελέσματα [32]:

Το πρώτο αφορά τη δομή των γραφημάτων που δεν επιδέχονται μια κλίκα ως εμβύθιση.

**Θεώρημα 1.2.** Έστω  $G$  ένα γράφημα και  $t \geq 1$  θετικός ακέραιος αριθμός. Εάν το  $G$  δεν επιδέχεται το  $K_t$  ως ασθενής εμβύθιση, τότε υπάρχει μια δεντρο-τομο-αποσύνδεση  $(T, \mathcal{X})$  του  $G$  με προσκόλληση λιγότερη από  $t^2$  έτσι ώστε κάθε κορμός έχει  $(t, t^2)$ -φραγμένο βαθμό.

Αποφεύγουμε να ορίσουμε την έννοια της δεντρο-τομο-αποσύνδεσης καθώς δεν είναι σημαντική για τα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Το δεύτερο υπογραμμίζει τη δομή των γραφημάτων που δεν περιέχουν ένα επίπεδο γράφημα ως εμβύθιση.

**Θεώρημα 1.3.** Έστω  $G$  γράφημα και  $r \geq 1$  θετικός ακέραιος. Αν το  $G$  έχει δεντρο-τομο-πλάτος τουλάχιστον  $f(r)$ , τότε το  $G$  έχει μια ασθενής εμβύθιση του  $r$ -τοίχου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η κλάση των επιπέδων γραφημάτων δεν είναι κλειστή ως προς τις εμβυθίσεις. Για την ακρίβεια, κάθε γράφημα απαντάται ως εμβύθιση ενός επίπεδου γραφήματος ενώ τα (τοπολογικά) ελάσσονα ενός επίπεδου γραφήματος είναι πάντοτε επίπεδα.

Στην καρδιά της θεωρίας του έργου Graph Minors των Robertson και Seymour, υπάρχει ένα θεώρημα όπου για κάθε συγκεκριμένο γράφημα  $H$  μελετούνται οι ιδιότητες της δομής των γραφημάτων που δεν περιέχουν το  $H$  ως έλασσον. Οι Robertson και Seymour χρησιμοποίησαν αυτό το αποτέλεσμα για να αποδείξουν την εικασία του Wagner, δηλαδή ότι τα πεπερασμένα γραφήματα είναι *καλά-μερικώς-διατεταγμένα* ως προς τη σχέση ελάσσονος, και παρουσίασαν ένα πολυωνυμικό αλγόριθμο που ελέγχει τη ύπαρξη ελάσσονος ενός γραφήματος  $H$  σε ένα γράφημα  $G$  και τρέχει σε χρόνο  $O(f(H)|V(G)|^3)$  [25]. Αργότερα, επέκτειναν την απόδειξη της γνωστής εικασίας του Wagner [27] ώστε να αποδείξουν ότι τα γραφήματα είναι *καλά-μερικώς-διατεταγμένα* ως προς τη σχέση της εμβύθισης [29]. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα γραφήματα δεν είναι *καλά-μερικώς-διατεταγμένα* ως προς τη σχέση του τοπολογικού ελάσσονος.

Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας, φαίνεται να συγκεντρώνεται στα ανοικτά προβλήματα και εικασίες του τομέα αυτού. Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας θα γίνει μια εκτενής παρουσίαση και μελέτη μιας παραλλαγής της εικασίας του Hadwiger, που αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα ανοικτά προβλήματα της Θεωρίας Γραφημάτων.

## 1.2 Παραλλαγές της εικασίας του Hadwiger

Το αντικείμενο αυτής της μελέτης έχει βασιστεί σε γνωστές εικασίες οι οποίες σχετίζονται με το χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος και την ύπαρξη μιας κλίμακας σε αυτό.

**Εικασία 1.4** (Εικασία του Hadwiger). Κάθε γράφημα χωρίς θηλιές και που δεν έχει  $K_t$ -έλασσον είναι  $(t - 1)$ -χρωματίσιμο.

Η εικασία του Hadwiger αποτελεί ένα από τα πιο μεγάλα ανοικτά προβλήματα της Θεωρίας Γραφημάτων. Για τις τιμές  $t \leq 4$  η εικασία αληθεύει, οι περιπτώσεις  $t = 5$  και  $t = 6$  έχουν αποδειχτεί από τους [31] και [28] αντίστοιχα, ενώ η εικασία παραμένει ανοικτή για  $t \geq 7$  με εξαίρεση ένα μερικό αποτέλεσμα [21] για την περίπτωση  $t = 7$ .

Ο Hajós πρότεινε μια ισχυρότερη εικασία, η οποία πλησιάζει περισσότερο την έννοια της εμβύθισης:

**Εικασία 1.5** (Εικασία του Hajós). Κάθε γράφημα με χρωματικό αριθμό τουλάχιστον  $t$  περιέχει μια υποδιαίρεση του πλήρους γραφήματος με  $t$  κορυφές, για κάθε  $t \geq 1$ .

Για τις τιμές  $t \leq 4$ , η εικασία αληθεύει, ενώ για τα  $t = 5, 6$ , παραμένει ανοικτή. Ακόμη, για τις περιπτώσεις  $t \geq 7$  έχει διαψευδθεί από τον Catlin [4]. Στη πραγματικότητα, η εικασία έχει αποδειχτεί ψευδής για σχεδόν όλα τα γράφηματα από τους Erdős και Fajtlowicz [14]. Επιπλέον, ο Thomassen έχει ασχοληθεί με αρκετά παραδείγματα στα οποία η εικασία του Hajós αποτυγχάνει [30].

Τέλος, οι Abu-Khazam και Langston ([1]) πρότειναν την μετάφραση των προηγούμενων εικασιών για τη σχέση της εμβύθισης.

**Εικασία 1.6** (Abu-Khazam, Langston). Το πλήρες γράφημα  $K_t$  μπορεί να εμβυθιστεί σε κάθε γράφημα με χρωματικό αριθμό τουλάχιστον  $t$ .

Από το γεγονός ότι η εικασία του Hajós αληθεύει για  $t \leq 4$ , έπεται ότι η Εικασία 1.6 ισχύει επίσης για τις περιπτώσεις  $t \leq 4$ . Οι Lescure και Meyniel [22] απέδειξαν την εικασία για  $t \leq 6$  και οι DeVos, Kawarabayashi, Mohar και Okamura [9] παρουσίασαν απόδειξη που καλύπτει τις τιμές  $t \leq 7$ . Ως εκ τούτου η εικασία παραμένει ανοικτή για  $t \geq 8$ .

Σε αυτήν την εργασία, θα εστιάσουμε σε μια παραλλαγή της εικασίας που συσχετίζει τις εμβυθίσεις με τον ελάχιστο βαθμό ενός γραφήματος. Για την ακρίβεια, εξερευνούμε τη συνάρτηση  $d(t)$  για την οποία αν ένα γράφημα έχει ελάχιστο βαθμό  $d(t)$  περιέχει την κλίκα  $K_t$  ως εμβύδιση. Προφανώς, ισχύει ότι  $d(t) \geq t - 1$ .

Οι DeVos, Kawarabayashi, Mohar και Okamura [9] έδειξαν ότι  $d(t) = t - 1$  για τις τιμές  $t \in \{5, 6, 7\}$  και αυτό είναι το αποτέλεσμα που αναλύουμε στο Κεφάλαιο 2.

Επιπλέον στο Κεφάλαιο 3, οι Collins και Heenean [7] απέδειξαν με τη σειρά τους ότι δεν ισχύει η εικασία για  $t \in \{8, 9, 11\}$ . Το παζλ συμπληρώνεται από τον Paul Seymour [9], [22] όπου παρατίθεται το αντιπαράδειγμα του όταν  $t = 10$  το οποίο επεκτείνεται, συνεπώς ισχύει  $d(t) \geq t$  για τις τιμές  $t \geq 10$  διαψεύδοντας έτσι την εικασία.

Έπειτα, στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται ένα άνω φράγμα της συνάρτησης  $d(t)$  για ισχυρές εμβυθίσεις των DeVos και λοιπών [8] οι οποίοι έδειξαν ότι  $d(t) \leq 200t$  και ένα ακόμη άνω φράγμα για ασθενείς εμβυθίσεις των Gauthier, Le και Wollan [17] όπου  $d(t) \leq 7t + 7$ .

Τέλος, ολοκληρώνουμε την εργασία με τα συμπεράσματα στο Κεφάλαιο 5.

Η γενική εικόνα των εικασιών αποτυπώνεται στον Πίνακα 1.1.

Εικασίες / $t \in \mathbb{N}$	$\leq 4$	5	6	7	8, 9, 11	$\geq 10$	$\geq 12$
Hadwiger	✓	✓	✓	?	?	?	?
Hajós	✓	?	?			✗	
Abu-Khizam, Langston	✓		✓	✓	?	?	?
Βαθμού Εμβύδισης	✓		✓		✗	✗	✗

Πίνακας 1.1: Εικασίες και αποτελέσματα

### 1.3 Εισαγωγικοί μαθηματικοί ορισμοί

Ας ξεκινήσουμε με μια εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Θεωρίας Γραφημάτων. Θα ακολουθήσουμε τους [11] και [23], όπου ο ενδιαφερομενος αναγνώστης θα βρει όλες τις έννοιες, που θα αναφερθούν παρακάτω, σε πολύ πιο λεπτομερείς και αναλυτικές περιγραφές. Σε αυτήν την εργασία υποθέτουμε ότι όλα τα γραφήματα είναι πεπερασμένα, μη-κατευθυνόμενα και μπορεί να περιέχουν θηλιές ή πολλαπλές ακμές.

**Ορισμός 1.7** (Γράφημα). Ένα γράφημα είναι ένα ζευγάρι συνόλων  $G = (V, E)$  ούτως ώστε  $E \subseteq \binom{V}{2}$ , όπου  $\binom{V}{2}$ : όλα τα πιθανά δισύνολα του συνόλου  $V$ . Δωσμένου ενός γραφήματος  $G$ , συμβολίζουμε  $V(G)$  το σύνολο κορυφών του  $G$  και  $E(G)$  το σύνολο ακμών του  $G$ . Η ποσότητα  $|V(G)|$  ορίζεται ως το πλήθος των κορυφών του  $G$ .

**Ορισμός 1.8** (Υπογράφημα). Ένα γράφημα  $G' = (V', E')$  καλείται υπογράφημα ενός άλλου γραφήματος  $G = (V, E)$  αν και μόνο αν  $E' \subseteq E \wedge ((v_1, v_2) \in E' \rightarrow v_1, v_2 \in V')$ , και  $V' \subseteq V$ .

**Ορισμός 1.9** (Εναγόμενο υπογράφημα). Έστω  $G = (V, E)$  ένα γράφημα, και  $S \subseteq V$  τυχαίο υποσύνολο κορυφών του  $G$ . Ως εναγόμενο υπογράφημα  $G[S]$  ορίζεται το γράφημα που έχει σύνολο κορυφών  $S$  και ακμές όλες τις ακμές του  $E$  για τις οποίες και τα δύο άκρα τους ανήκουν στο  $S$ .

**Ορισμός 1.10** (H-ελεύθερο). Έστωσαν  $G, H$  γραφήματα. Εάν το  $G$  δεν περιέχει εναγόμενο υπογράφημα ισομορφικό του  $H$ , το  $G$  καλείται H-ελεύθερο. Έστω  $\mathcal{F}$  μια κλάση γραφημάτων και  $G$  ένα από αυτά. Αν το  $G$  είναι F-ελεύθερο για κάθε  $F \in \mathcal{F}$ , τότε το  $G$  είναι  $\mathcal{F}$ -ελεύθερο.

**Ορισμός 1.11** (Καλά-μερικώς-διατεταγμένη-διάταξη). Μια διάταξη καλείται καλά-μερικώς-διατεταγμένη-διάταξη όταν κάθε άπειρη ακολουθία στοιχείων  $x_0, x_1, x_2, \dots$  από το  $X$  περιέχει ένα αύξον ζευγάρι  $x_i \leq x_j$  όπου  $i < j$ .

**Ορισμός 1.12** (Συμμετρική διαφορά συνόλων). Η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων  $A, B$  είναι η ένωση των μη-κοινών στοιχείων τους, δηλαδή  $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

**Ορισμός 1.13** (Ισομορφισμός γραφημάτων). Δυο γραφήματα  $G, H$  λέγονται ισόμορφα αν υπάρχει ένας ομομορφισμός  $\tau : V(G) \rightarrow V(H)$ , που είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός, τέτοια ώστε για κάθε  $u, v \in V(G)$  με  $u \neq v$  να ισχύει ότι:  $\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\tau(u), \tau(v)\} \in E(H)$ .

**Ορισμός 1.14** (Διαμέριση). Ως διαμέριση ενός γραφήματος  $G$  θεωρείται ένα πλήθος  $k$  ξένων μη κενών υποσυνόλων  $V_1, V_2, \dots, V_k$  τέτοια ώστε κάθε ακμή του  $G$  να ενώνει κορυφές που ανήκουν σε διαφορετικά υποσύνολα.

**Ορισμός 1.15** (Διμερές γράφημα). Ένα γράφημα  $G$  καλείται διμερές ή διαμερισμένο όταν το σύνολο των κορυφών του  $V(G)$  μπορεί να διαμεριστεί σε δυο ξένα μη κενά υποσύνολα  $V_1$  και  $V_2$ , τέτοια ώστε κάθε ακμή του  $G$  να ενώνει μια κορυφή του  $V_1$  με μια κορυφή του  $V_2$ .

**Ορισμός 1.16** (Πλήρες πολυμερές γράφημα). Ένα γράφημα του οποίου οι κορυφές είναι ή μπορούν να χωριστούν σε  $k$  διαφορετικά ανεξάρτητα σύνολα λέγεται  $k$ -μερές. Άρα ένα πλήρες  $k$ -μερές γράφημα είναι ένα  $k$ -μερές γράφημα στο οποίο υπάρχει ένα άκρο μεταξύ κάθε ζεύγους κορυφών από διαφορετικά ανεξάρτητα σύνολα. Οπότε ως πλήρες πολυμερές γράφημα καλείται ένα πλήρες  $k$ -μερές γράφημα για κάποιο  $k$ .

**Ορισμός 1.17** (Μονοπάτι). Μια ακολουθία κορυφών  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1})$  όπου κάθε κορυφή της ακολουθίας συνδέεται με την επόμενη μέσω ακμής ονομάζεται *μονοπάτι*. Κάθε κορυφή και ακμή του μονοπατιού εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.

**Ορισμός 1.18** (Εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια). Καλούμε  $k \geq 2$  μονοπάτια ενός γραφήματος  $G$  *εσωτερικώς διακεκριμένα* όταν τα σύνολα των εσωτερικών κορυφών τους είναι διακεκριμένα (δηλ. ανά δύο ξένα μεταξύ τους).

**Ορισμός 1.19** (Κύκλος). Ένα μονοπάτι  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1} = a_1)$  που έχει για αρχή και τέλος την ίδια κορυφή λέγεται *κλειστό μονοπάτι* ή *κύκλος*.

**Ορισμός 1.20** (Οϊλεριανό γράφημα). Ένα συνεκτικό γράφημα  $G$  καλείται *οϊλεριανό* αν υπάρχει κλειστό μονοπάτι που περνάει από όλες τις ακμές του γραφήματος.

**Ορισμός 1.21** (Τρύπα). Έστω  $G$  ένα γράφημα. Ένας εναγόμενος κύκλος μήκους τουλάχιστον τέσσερα καλείται ως *τρύπα*.

**Ορισμός 1.22** (Συνεκτική συνιστώσα). Δύο κορυφές  $u, v$  ενός γραφήματος ανήκουν στην ίδια *συνεκτική συνιστώσα* αν υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή  $u$  στην κορυφή  $v$ . Όταν ένα γράφημα αποτελείται από μια μόνο συνεκτική συνιστώσα ονομάζεται *συνεκτικό*.

**Ορισμός 1.23** (Γέφυρα). Καλούμε μια ακμή  $e$  ενός γραφήματος  $G$  *γέφυρα* όταν το γράφημα  $G \setminus e$  έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το  $G$ .

**Ορισμός 1.24** (Συνεκτικό γράφημα). Ένα γράφημα  $G$  καλείται *συνεκτικό* αν κάθε ζεύγος κορυφών του  $u, v \in V(G)$  ενώνεται με ένα μονοπάτι.

**Ορισμός 1.25** ( $k$ -Συνεκτικό γράφημα). Ένα γράφημα  $G$  καλείται  *$k$ -συνεκτικό* ( $k \in \mathbb{N}$ ) εάν  $|V(G)| \geq k + 1$  και για κάθε  $X \subset V(G)$  με  $|X| < k$  ισχύει ότι το  $G \setminus X$  είναι συνεκτικό.

**Ορισμός 1.26** (Διαχωριστής). Έστω γράφημα  $G$  και έστω μη κενό σύνολο  $S \subseteq V(G)$ . Το  $S$  καλείται *διαχωριστής* του  $G$  αν το γράφημα  $G \setminus S$  έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το  $G$ .

**Ορισμός 1.27** (Δισυνεκτικό γράφημα). Λέμε ότι ένα γράφημα είναι *2-συνεκτικό* (ή απλά *δισυνεκτικό*) αν είναι συνεκτικό, έχει περισσότερες από τρεις κορυφές και όλοι οι διαχωριστές του έχουν τουλάχιστον δύο κορυφές.

**Ορισμός 1.28** (Κλίκα). Δωσμένου ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$ , ένα υποσύνολο κορυφών τέτοιο ώστε κάθε δύο διακεκριμένες κορυφές του συνδέονται με ακμή καλείται *κλίκα* ή *πλήρες γράφημα*.

**Ορισμός 1.29** (Βαθμός). Σε αυτήν την εργασία, ως *βαθμός* μιας κορυφής  $v$ , θα συμβολίζεται  $\deg(v)$ , θεωρούμε τον αριθμό των ακμών που έχουν ως άκρο τους τη  $v$  (μετρώντας τις θηλιές διπλά). Ο μεγαλύτερος βαθμός ενός γραφήματος συμβολίζεται με  $\Delta(G)$  και ο μικρότερος βαθμός με  $\delta(G)$ .

**Ορισμός 1.30** (Μέσος βαθμός). *Μέσος βαθμός* ενός γραφήματος είναι το πηλίκο του αθροίσματος των βαθμών των κορυφών ως προς το πλήθος των κορυφών και το συμβολίζουμε με  $d(G)$ . Επειδή όμως κάθε ακμή υπολογίζεται στους βαθμούς και των δυο κορυφών που είναι προσκείμενη ισχύει  $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \times |E(G)|$ . Άρα  $d(G) = \frac{2 \times |E(G)|}{|V|}$ .

**Ορισμός 1.31** ( $k$ -Κανονικό γράφημα). Ένα  $k$ -κανονικό γράφημα είναι ένα γράφημα του οποίου κάθε κορυφή έχει βαθμό  $k$ .

**Ορισμός 1.32** (Γειτονιά). Δοσμένης μιας κορυφής  $v \in V(G)$ , ορίζουμε ως *γειτονιά* της  $v$  το σύνολο  $N_G(v) = \{u | u \in V(G), \{u, v\} \in E(G)\}$ . Συμβολίζουμε τη κλειστή γειτονιά  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ .

**Ορισμός 1.33** (Ανεξάρτητο σύνολο κορυφών). Έστω  $G = (V, E)$  ένα γράφημα. Ένα υποσύνολο  $S$  του  $V$  καλείται *ανεξάρτητο σύνολο* του  $G$  αν δεν υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές στο  $S$ .

**Ορισμός 1.34** (Αριθμός ανεξαρτησίας). Έστω  $G$  ένα γράφημα. Η πληθικότητα του μεγαλύτερου ανεξάρτητου συνόλου κορυφών, συμβολίζεται  $\alpha(G)$ , και είναι ο αριθμός ανεξαρτησίας του  $G$ .

**Ορισμός 1.35** (Χρωματισμός). Ένας  $t$ -χρωματισμός ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  είναι ένας χρωματισμός από ένα σύνολο με  $t$  χρώματα έτσι ώστε κάθε δύο γειτονικές κορυφές χρωματίζονται με διαφορετικό τρόπο. Δηλαδή, ένας  $t$ -χρωματισμός του γραφήματος  $G = (V, E)$  είναι ουσιαστικά μια απεικόνιση  $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$  τέτοια ώστε:  $\forall e = \{u, v\} \in E : c(u) \neq c(v)$ .

**Ορισμός 1.36** (Χρωματικός αριθμός). Ο *χρωματικός αριθμός* του  $G$ , που συμβολίζεται  $\chi(G)$ , είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματιστούν όλες οι κορυφές του  $G$ . Το γράφημα  $G$  λέγεται  $t$ -χρωματίσιμο εάν  $\chi(G) = t$ .

**Ορισμός 1.37** (Ταίριασμα). Ένα υποσύνολο ακμών  $M \subseteq E$  καλείται *ταίριασμα* του  $G$  όταν κάθε κορυφή εφάπτεται σε μια το πολύ ακμή του  $M$ , δηλαδή οι ακμές του δεν έχουν κοινά άκρα. Ένα ταίριασμα ονομάζεται *τέλειο* όταν όλες οι κορυφές εφάπτονται σε ακμές του  $M$ . Ένα ταίριασμα λέγεται *μέγιστο* αν δεν υπάρχει ταίριασμα με μεγαλύτερο αριθμό ακμών.

**Ορισμός 1.38** (Υποταιριαζόμενο γράφημα). Ένα γράφημα  $G$  καλείται *υποταιριαζόμενο* όταν αφαιρώντας οποιαδήποτε κορυφή προκύπτει γράφημα με τέλειο ταίριασμα.

**Ορισμός 1.39** (Υποδιαίρεση ακμής). Σε ένα απλό γράφημα  $G = (V, E)$ , ως *υποδιαίρεση* της ακμής  $e = uv \in E(G)$  καλείται η αντικατάσταση της ακμής  $e$  από την κορυφή  $x$  και τις νέες ακμές  $ux$  και  $xv$ .

**Ορισμός 1.40** (Σύνθλιψη ακμής). Έστω  $G = (V, E)$  ένα γράφημα και  $e = uv$  μια από τις ακμές του. Συμβολίζουμε με  $G/e$  το γράφημα που προέρχεται από το  $G$  συνθλίβοντας την  $e$ , δηλαδή αντικαθιστώντας τη με μια νέα κορυφή  $v_e$  έτσι ώστε  $N(v_e) = N(u) \cup N(v)$ , και διαγράφοντας τυχούσες πολλαπλές ακμές. Πιο τυπικά,  $G/e = (V', E')$  όπου  $E' = \{xy | \{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset\} \cup \{v_e w | uw \in E \setminus uv \vee vw \in E \setminus uv\}$  και  $V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$ .

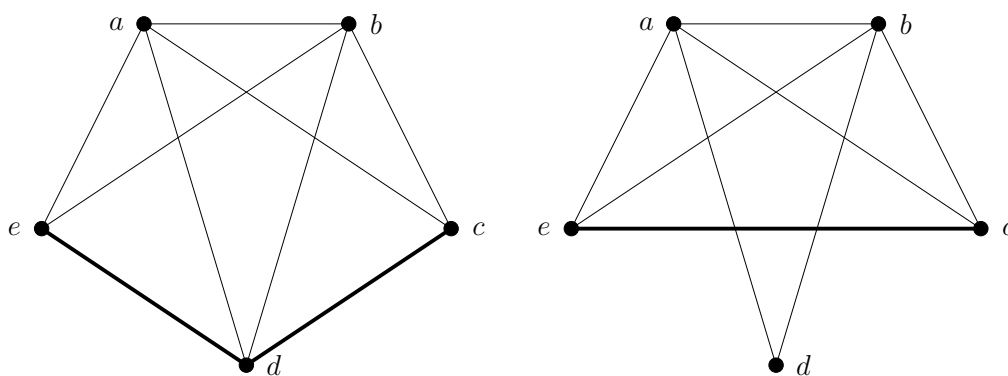
**Ορισμός 1.41** (Έλασσον). Ένα γράφημα  $H$  καλείται έλασσον ενός γραφήματος  $G$ , αν ένα γράφημα (ισομορφικό του)  $H$  μπορεί να δημιουργηθεί από ένα υπογράφημα του  $G$  συνθλίβοντας ακμές.

**Ορισμός 1.42** (Τοπολογικό έλασσον). Ένα γράφημα  $H$  ορίζεται ως τοπολογικό έλασσον του γραφήματος  $G$ , αν το  $G$  περιέχει ένα υπογράφημα ισομορφικό ενός γραφήματος μπορεί να δημιουργηθεί από το  $H$  υποδιαιώντας ακμές. Επιπλέον, λέμε ότι το  $G$  περιέχει μια υποδιαίρεση του  $H$ .

**Ορισμός 1.43** (Ανύψωση ακμής). Ένα ζευγάρι γειτονικών ακμών  $uv$  και  $vw$  με  $u \neq w$  λέγεται ανυψωμένο όταν διαγράφουμε την κορυφή  $u$  και κατ'επέκταση τις ακμές  $uv$  και  $vw$ , και προσδίδουμε την ακμή  $uw$  (πιθανώς παράλληλα με ήδη υπάρχουσα ακμή).

**Ορισμός 1.44** (Διάλυση κορυφής). Ως διάλυση της κορυφής  $v$  καλείται η διαγραφή της μετά από ανύψωση κάθε ζεύγους γειτονικών ακμών  $uv$  και  $vw$  όπου  $u \neq w$ .

**Ορισμός 1.45** (Εμβύδιση). Ένα γράφημα  $H$  καλείται εμβυδισμένο στο γράφημα  $G$  αν από ένα υπογράφημα του  $G$  μπορεί να δημιουργηθεί ένα ισομορφικό του  $H$  ανυψώνοντας ζεύγη ακμών. Εάν το  $H$  είναι εμβυδισμένο στο  $G$ , λέμε επίσης ότι το  $G$  περιέχει μια εμβύδιση  $H$ .



Σχήμα 1.1: Εμβύδιση ανυψώνοντας τις ακμές  $cd, de$

**Ορισμός 1.46** (Παράλληλη κλάση). Εάν δύο κορυφές συνδέονται με παραπάνω από μία ακμή, ονομάζουμε το σύνολο των ακμών που τις συνδέουν παράλληλη κλάση.



Χρειαζόμαστε έναν ακόμη εναλλακτικό ορισμό εμβυθίσεων ώστε να περιγράψουμε τις ασθενείς και ισχυρές εμβυθίσεις:

**Ορισμός 1.47** (Εμβύθιση μέσω μονοπατιών). Ένα γράφημα  $H$  καλείται εμβυθισμένο στο γράφημα  $G$  αν και μόνο αν υπάρχει ένας μονομορφισμός  $\pi_V : V(H) \rightarrow V(G)$  που μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονομορφισμό  $\pi_E : E(H) \rightarrow \{\text{μονοπάτια του } G\}$  έτσι ώστε αν  $u, v \in V(H)$  και  $e = uv \in E(H)$ , τότε  $\pi_E(e)$  είναι ένα μονοπάτι μεταξύ των  $\pi_V(u)$  και  $\pi_V(v)$  και ισχύει ότι για όλα τα  $e_1 \neq e_2$ , τα  $\pi_E(e_1)$  και  $\pi_E(e_2)$  είναι ακμο-διακεκριμένα.

**Ορισμός 1.48** (Ασθενής εμβύθιση). Ένα γράφημα  $G$  επιδέχεται μια ασθενή εμβύθιση ενός γραφήματος  $H$  αν οι συναρτήσεις  $\pi_V$  και  $\pi_E$  ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

- η συνάρτηση  $\pi_V$  είναι μονομορφισμός
- για κάθε ακμή  $e \in E(H)$  με άκρα  $u$  και  $v$ , το  $\pi_E(e)$  είναι ένα μονοπάτι με άκρα  $\pi_V(u)$  και  $\pi_V(v)$  αντιστοίχως
- για δύο ακμές  $e_1, e_2 \in E(H)$ , με  $e_1 \neq e_2$ , τα  $\pi_E(e_1)$  και  $\pi_E(e_2)$  δεν έχουν κοινή ακμή.

**Ορισμός 1.49** (Ισχυρή εμβύθιση). Επιπλέον, ορίζεται ότι το  $G$  επιδέχεται μια ισχυρή εμβύθιση του  $H$  αν πέρα από τις προαναφερθείσες ιδιότητες ισχύει και το παρακάτω:

- Για κάθε ακμή  $e \in E(H)$  με άκρα  $u$  και  $v$ , τα μόνα κοινά στοιχεία του μονοπατιού  $\pi_E(e)$  με το σύνολο  $\pi_V(V(H))$  είναι τα άκρα του.

**Ορισμός 1.50** (Κορυφή διακλάδωσης). Οι κορυφές  $\{\pi_V(x) : x \in V(H)\}$  λέγονται κορυφές διακλάδωσης της εμβύθισης.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΠΛΗΡΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΩΣ ΕΜΒΥΘΙΣΕΙΣ

Σε αυτό και το επόμενο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την παραλλαγή της εικασίας των Abu-Khizam και Langston 1.6, που συσχετίζει τις εμβυθίσεις με τον ελάχιστο βαθμό ενός γραφήματος. Εξ'ορισμού, για ένα γράφημα  $H$  εμβυθισμένο σε γράφημα  $G$  ισχύει ότι ο βαθμός κάθε κορυφής στο  $H$  είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού της στο  $G$ , όπερ για να έχει ένα  $t$ -χρωματίσιμο γράφημα  $G$  μια εμβύθιση  $K_t$  πρέπει να περιέχει τουλάχιστον  $t$  κορυφές βαθμού τουλάχιστον  $t - 1$ .

Για την ακρίβεια, θα επικεντρωθούμε στη συνάρτηση  $d(t)$  για την οποία αν ένα γράφημα έχει ελάχιστο βαθμό  $d(t)$  περιέχει την κλίκα  $K_t$  ως εμβύθιση. Προφανώς, ισχύει  $d(t) \geq t - 1$ . Για την ειδική περίπτωση όπου  $d(t) = t - 1$ , έπεται ότι η εικασία 1.6 επίσης αληθεύει, επειδή κάθε  $t$ -χρωματίσιμο γράφημα έχει ένα απλό υπογράφημα ελάχιστου βαθμού  $t - 1$ . Θα αναλύσουμε την απόδειξη των DeVos, Kawarabayashi, Mohar και Okamura [9] που έδειξαν ότι  $d(t) = t - 1$  για τις τιμές  $t \in \{5, 6, 7\}$ .

## 2.1 Γραφήματα με εμβύδισεις $K_5, K_6, K_7$

Η παραλλαγή της εικασίας των Abu-Khizam και Langston 1.6 που θα μελετηθεί στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 2.1.** Έστω  $t \in \{5, 6, 7\}$ , τότε  $d = d(t) = t - 1$  είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός για τον οποίο κάθε απλό γράφημα ελάχιστου βαθμού τουλάχιστον  $d(t)$  περιέχει μια εμβύδιση  $K_{d+1} = K_t$ .

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε μια απόδειξη την ισχυρότερης εκδοχής του Θεωρήματος 2.1.

**Θεώρημα 2.2.** Έστωσαν  $d \in \{4, 5, 6\}$ ,  $G = (V, E)$  γράφημα χωρίς θηλιές και μια κορυφή  $u \in V$ . Ας υποθέσουμε ότι το  $G$  ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- (1)  $|V| \geq d$ .
- (2)  $\deg(v) \geq d$  για κάθε  $v \in V \setminus \{u\}$ .
- (3) Υπάρχουν το πολύ  $d - 2$  παράλληλες κλάσεις, στις οποίες κάθε ακμή είναι γειτονική με τη  $u$ .

Τότε υπάρχει μια εμβύδιση  $K_{d+1}$  στο  $G$ .

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι το θεώρημα δεν ισχύει, με  $G$  το "μικρότερο" (ως προς  $|V| + |E|$ ) αντιπαράδειγμα, δηλαδή γράφημα που ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες και δεν έχει εμβύδιση  $K_{d+1}$ . Θα αποδείξουμε αρκετούς ισχυρισμούς μέσω των οποίων προκύπτει το ζητούμενο.

**Ισχυρισμός 2.3.**  $|V| \geq d + 1$ .

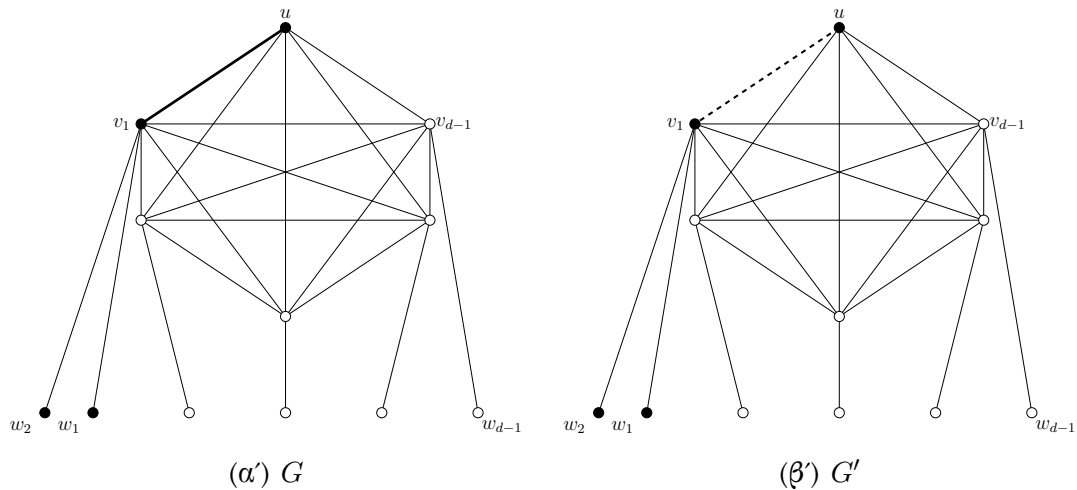
*Απόδειξη ισχυρισμού.* Οι Ιδιότητες 2 και 3 υποδεικνύουν την ύπαρξη μιας κορυφής στο  $V \setminus \{u\}$  που δεν είναι γειτονική με καμία παράλληλη κλάση. Άρα,  $|V| \geq d + 1$ .  $\triangle$

**Ισχυρισμός 2.4.** Κάθε ακμή έχει ως άκρο μια κορυφή βαθμού τουλάχιστον  $d$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Έστω  $e$  η ακμή της οποίας και οι δύο κορυφές έχουν βαθμό γνήσια μικρότερο από  $d$ . Από την Ιδιότητα 2, συμπεραίνουμε ότι αναγκαστικά μια από τις δύο κορυφές είναι η  $u$  αφού είναι η μόνη με βαθμό μικρότερο από  $d$ . Έστω  $e = uw$  όπου  $w \in V \setminus \{u\}$ . Συνεπώς  $\deg(w) < d$ , άτοπο από την Ιδιότητα 2.  $\triangle$

**Ισχυρισμός 2.5.**  $\deg(v) = d$  για κάθε  $v \in N(u)$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Αν υπήρχε κορυφή  $v \in N(u)$  με βαθμό μεγαλύτερο από  $d$ , τότε το γράφημα  $G' = G - uv$  θα ήταν ένα μικρότερο αντιπαράδειγμα, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1, το οποίο οδηγεί σε άτοπο.  $\triangle$

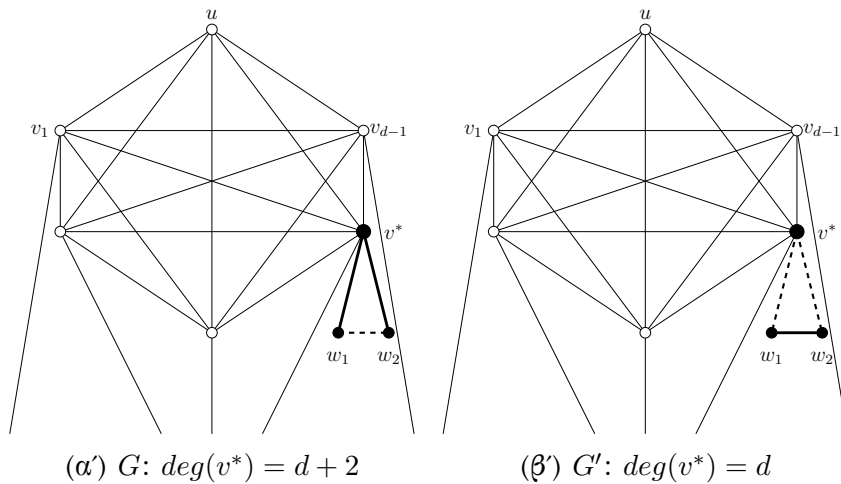


Σχήμα 2.1: Αντιπαράδειγμα  $G'$  όπου  $\deg(v) > d$  προς απόδειξη ύπαρξης εμβύθισης  $K_{d+1}$

**Ισχυρισμός 2.6.** Για κάθε  $v \in V \setminus \{u\}$   $\deg(v) \leq d + 1$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Έστω ότι υπάρχει μια κορυφή  $v^* \in V \setminus \{u\}$  με βαθμό  $\deg(v^*)$  αυστηρά μεγαλύτερο του  $d + 1$ . Τότε συμβαίνει ένα από τα δύο ακόλουθα:

είτε οι γείτονες της  $v^*$  σχηματίζουν μια κλίκα (και άρα υπάρχει μια εμβύθιση  $K_{d+1}$  στο  $G$ ), είτε υπάρχουν δύο μη-γειτονικές κορυφές  $w_1, w_2 \in N(v^*)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Το γράφημα που προέρχεται από το  $G$  ανυψώνοντας τις  $v^*w_1$  και  $v^*w_2$  ώστε να δημιουργηθεί η ακμή  $w_1w_2$  αποτελεί μικρότερο αντιπαράδειγμα, καταλήγοντας σε άτοπο.  $\triangle$

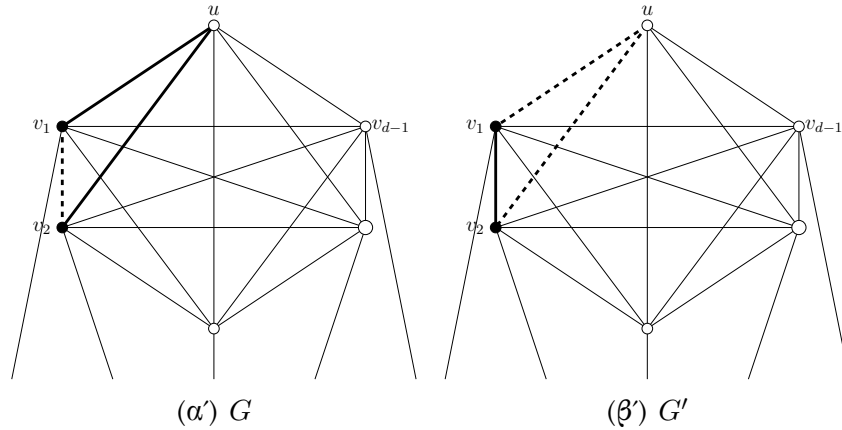


Σχήμα 2.2: Αντιπαράδειγμα  $G'$  όπου  $\deg(v^*) = d + 2$  προς απόδειξη ύπαρξης εμβύθισης  $K_{d+1}$

Συνεπώς, συνδυάζοντας την Ιδιότητα 2 με τον Ισχυρισμό 2.6 προκύπτει η ανισότητα:  $d \leq \deg(v) \leq d + 1$  για κάθε  $v \in V \setminus \{u\}$ .

**Ισχυρισμός 2.7.** Το σύνολο  $N(u)$  ενάγει κλίκα.

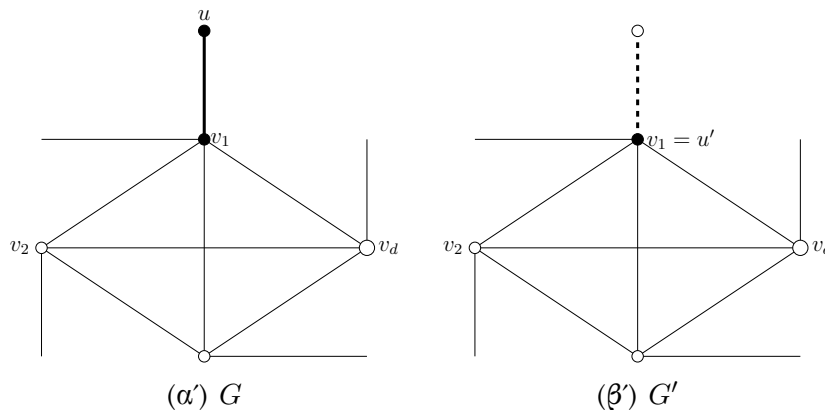
*Απόδειξη ισχυρισμού.* Έστωσαν δύο κορυφές  $v_1, v_2 \in N(u)$  μη-γειτονικές, όπως φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 2.3. Τότε το γράφημα που παράγεται από την ανύψωση των κορυφών  $uv_1$  και  $uv_2$  δημιουργώντας την ακμή  $v_1v_2$  παραμένει αντιπαράδειγμα και μάλιστα μικρότερο από το  $G$ , πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεση.  $\triangle$



Σχήμα 2.3: Αντιπαράδειγμα  $G'$  όπου  $|N(u)|$  όχι κλίκα, προς απόδειξη ύπαρξης εμβύθισης  $K_{d+1}$

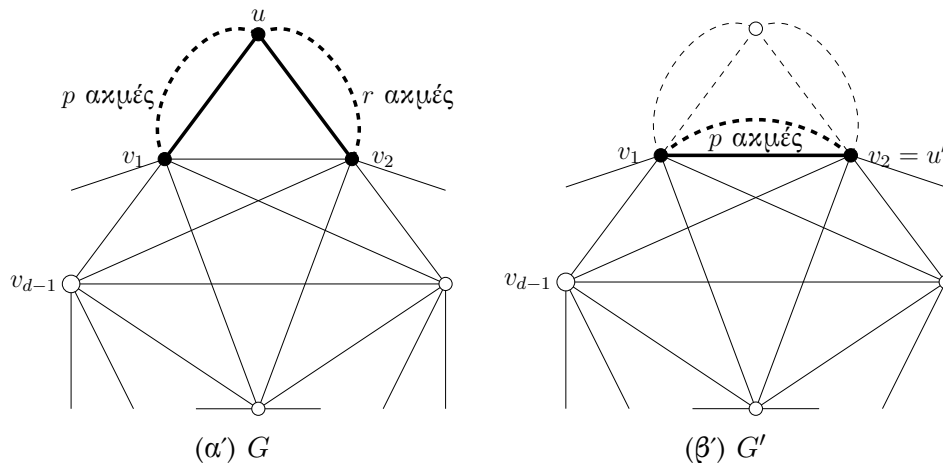
**Ισχυρισμός 2.8.**  $|N(u)| \geq 3$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Όταν  $|N(u)| \leq 1$ , έστω  $\{v_1\} = N(u)$ , τότε όπως παρουσιάζεται και στο Σχήμα 2.4, το γράφημα  $G - u$  (με την  $v_1$  να αποτελεί την ειδική κορυφή) είναι μικρότερο αντιπαράδειγμα, καταλήγοντας σε άτοπο. (ειδικότερα, εάν  $|N(u)| = 0$ , το γράφημα  $G$  ουσιαστικά αποτελείται από μια απομονωμένη κορυφή, την  $u$ ).



Σχήμα 2.4: Αντιπαράδειγμα  $G'$  όπου  $|N(u)| = 1$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύθισης  $K_{d+1}$

Όταν  $|N(u)| = 2$ , έστω  $\{v_1, v_2\} = N(u)$ , τότε έστω ότι υπάρχουν  $p$ -το πλήθος ακμές μεταξύ των  $u, v_1$  και  $r$  μεταξύ των  $u, v_2$  με  $p \leq r$ . Όπως παρατηρείται και στο Σχήμα 2.5, το γράφημα  $G'$  που προκύπτει από το  $G$  διαγράφοντας την κορυφή  $u$  και προσδένοντας  $p$  καινούριες παράλληλες ακμές ανάμεσα στις  $v_1, v_2$  αποτελεί μια εμβύδιση  $K_{d+1}$ , από όπου και έπεται ότι το  $G'$  (με την  $v_2$  να αποτελεί την ειδική κορυφή) είναι μικρότερο αντιπαράδειγμα, καταλήγοντας σε άτοπο ξανά.  $\triangle$



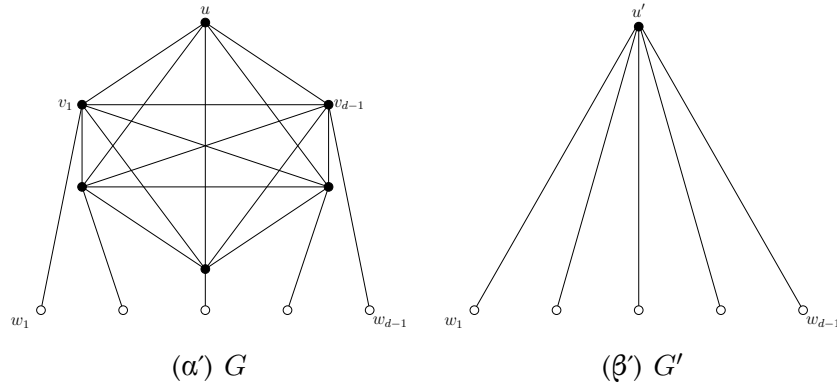
Σχήμα 2.5: Αντιπαράδειγμα  $G'$  όπου  $|N(u)| = 2$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύδισης  $K_{d+1}$

**Ισχυρισμός 2.9.**  $|N(u)| \leq d - 2$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Εάν ίσχυε ότι  $|N(u)| \geq d$ , τότε, σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 2.7, η  $N[u]$  θα περιείχε το  $K_{d+1}$  ως υπογράφημα, δηλαδή το  $G$  θα περιείχε μια εμβύδιση  $K_{d+1}$ , το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση.

Εάν  $|N(u)| = d - 1$ , τότε ας ονομάσουμε  $G'$  το γράφημα που προέρχεται από το  $G$  αντιστοιχίζοντας τη  $N[u]$  σε μια νέα κορυφή διαγράφοντας τυχόν θηλιές. Ειδικότερα, η κορυφή  $u'$  αντικαθιστά το σύνολο  $V(N[u])$  και οι ακμές  $u'w$  αντικαθιστούν τις ακμές τύπου  $vw$  ( $v \in N(u), w \notin N[u]$ ) (πιθανότατα αποκτώντας έτσι πολλαπλές ακμές γειτονικές με τη  $u'$ ). Συνδυάζοντας τους Ισχυρισμούς 2.5 και 2.7, παρατηρούμε ότι κάθε κορυφή της  $N(u)$  έχει ακριβώς ένα γείτονα εκτός του συνόλου  $N[u]$ . Συνεπώς, το  $G'$  που σχηματίζεται είναι εμβύδιση στο  $G$ . Λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβατική ιδιότητα της εμβύδισης, καταλήγουμε στο γεγονός ότι το  $G'$  αποτελεί μικρότερο αντιπαράδειγμα (με ειδική κορυφή την  $u'$ ). Αυτή η αντίφαση όπως απεικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα 2.6 ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.  $\triangle$

Επομένως, οι Ισχυρισμοί 2.8 και 2.9, οδηγούν στην ανισότητα:  $3 \leq |N(u)| \leq d - 2$ . Ας θυμηθούμε ότι  $d \in \{4, 5, 6\}$ . Πιο συγκεκριμένα, όταν  $d = 4$  η ανισότητα που αποδείχθηκε στον Ισχυρισμό 2.9 παίρνει την εξής μορφή:  $3 \leq |N(u)| \leq 2$ . Ως εκ τούτου, για τη συνέχεια της απόδειξης θα υποθέτουμε ότι  $d \in \{5, 6\}$ .

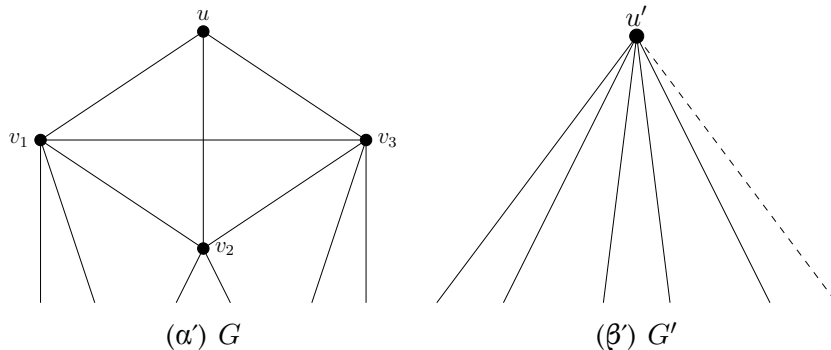


Σχήμα 2.6: Αντιπαράδειγμα  $G'$  όπου  $|N(u)| = d - 1$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμφύδισης  $K_{d+1}$

**Ισχυρισμός 2.10.** Τελικά  $d = 6$  και  $|N(u)| = 3$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Όπως προκύπτει από τον Ισχυρισμό 2.9 συμβαίνει ένα από τα εξής τρία: Είτε  $d = 5$  και  $|N(u)| = 3 = d - 2$ , είτε  $d = 6$  και  $|N(u)| = 4 = d - 2$ , είτε  $d = 6$  και  $|N(u)| = 3$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει αναγκαστικά μόνο η τελευταία περίπτωση. Όπως και προηγουμένως, σχηματίζουμε ένα καινούριο γράφημα  $G'$  μέσω του  $G$  απεικονίζοντας το σύνολο  $N[u]$  σε μια νέα κορυφή  $u'$  και διαγράφοντας τυχόν θηλιές. Αφού προκύπτει ότι το  $G'$  είναι συγκριτικά μικρότερο του  $G$ , συνεπάγεται ότι υπάρχει εμφύδιση  $K_{d+1}$  στο  $G'$ . Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι αυτή η εμφύδιση επεκτείνεται σε μια  $K_{d+1}$ -εμφύδιση στο  $G$ .

- Αρχικά, έστω ότι  $d = 5$  και  $|N(u)| = 3$ . Επειδή υπάρχει μια εμφύδιση  $K_6$  στο  $G'$ , θα ισχύει ένα από τα δύο: είτε η  $u' \in V(K_6)$  είτε όχι. Στη περίπτωση που ισχύει ότι  $u' \notin V(K_6)$  τότε η εμφύδιση στο  $G'$  είναι και εμφύδιση στο  $G$ , άτοπο. Διαφορετικά, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.7, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κορυφή διακλάδωσης  $v \in N(u)$ . Αυτή η συγκεκριμένη  $v$  που χρησιμοποιεί και τις πέντε ακμές της (δύο έξω από τη  $N[u]$  και τρεις από την κλίκα) συνδέεται (μέσω μονοπατιών) στις ίδιες ακριβώς κορυφές με την  $u'$ . Συνεπώς, αυτή η κορυφή  $v \in G$  ισοδυναμεί με την  $u' \in G'$ .

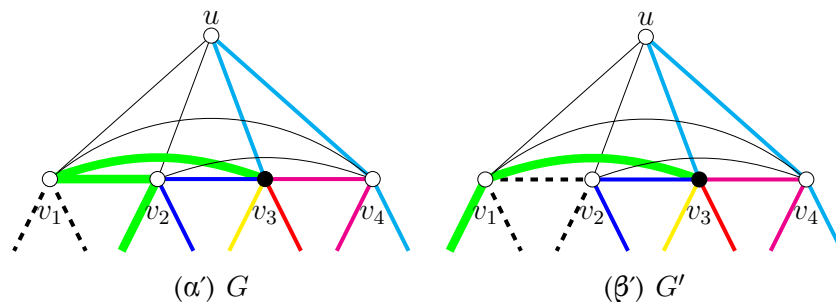


Σχήμα 2.7: Επεκτείνοντας την εμφύδιση  $K_6$  όταν  $|N(u)| = 3$



- Έπειτα, υποθέτουμε ότι  $d = 6$ , τότε  $|N(u)| = 4$ . Εκ νέου, επειδή υπάρχει εμφύδιση  $K_7$  στο  $G'$ , θα ισχύει ένα από τα δύο: είτε η  $u' \in V(K_7)$  είτε όχι. Εάν η  $u' \notin V(K_7)$  τότε η εμφύδιση στο  $G'$  είναι και εμφύδιση στο  $G$ , άτοπο. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι αναγκαστικά έξι από τις οκτώ συνολικά ακμές της που εξέρχονται από τη  $N(u)$ , χρησιμοποιούνται για να σχηματιστεί το  $K_7$  και οι υπόλοιπες δύο (αναπαρίστανται με κίτρινο και κόκκινο χρώμα) προέρχονται από μια συγκεκριμένη  $v \in N(u)$ . Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει κορυφή διακλάδωσης στη  $N(u)$ . Ως προς τη συμμετρία των σχημάτων, υπάρχουν δύο περιπτώσεις (αναλόγως ποιο γειτονικό ζευγάρι κορυφών της  $u'$  ανυψώνεται για να σχηματιστεί η καινούρια ακμή) για να εξεταστούν οι οποίες και παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.8: και οι δύο ακμές γειτονεύουν με μια  $v_i \in N(u)$  ή η μια ακμή είναι γειτονική με μια  $v_i \in N(u)$  και η άλλη με μια  $v_j \in N(u)$  όπου  $i \neq j$ . Οι ακμές που αναπαρίστανται με διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύουν τις ακμές που χρησιμοποιούνται από την κλίκα για να σχηματίσουν πιθανό μονοπάτι που περνάει από τη  $u' \in G'$ , ενώ η μαύρη κορυφή και τα έντονα-χρωματισμένα μονοπάτια απεικονίζουν τη γειτονιά της κορυφής που ανήκει στην εμφύδιση  $K_7$ . Αρκεί να αναφερθεί ότι αποκτήσαμε την αντίφαση που θέλαμε.

△



Σχήμα 2.8: Επεκτείνοντας την εμφύδιση  $K_7$  όταν  $|N(u)| = 4$

**Ισχυρισμός 2.11.** Το  $G$  δεν έχει ακριβώς μια παράλληλη κλάση.

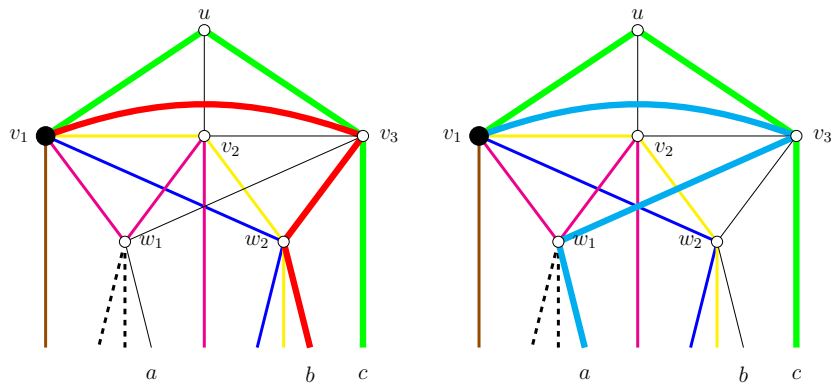
*Απόδειξη ισχυρισμού.* Έστω  $p(G)$  το πλήθος παράλληλων κλάσεων του  $G$ , ισχύει  $p(G) \leq d - 2 = 6 - 2 = 4$ . Αφού  $|N(u)| = 3$  από την ιδιότητα 3, έπεται ότι  $p(G) \leq 3$ . Ας υποθέσουμε ότι  $N(u) = \{v_1, v_2, v_3\}$  και η  $v_1$  σχηματίζει τη μοναδική παράλληλη κλάση της  $u$  στο  $G$ . Τότε, σχηματίζουμε ένα καινούριο γράφημα  $G'$  διαγράφοντας τη  $u$  και προσθέτοντας τις ακμές  $v_1v_2$  και  $v_1v_3$ . Οπότε το γράφημα  $G'$  αποτελεί εμφύδιση στο  $G$ , δίνοντας μας ένα μικρότερο αντιπαράδειγμα (με ειδική κορυφή τη  $u'$ ). Επομένως ισχύει  $p(G) \in \{0, 2, 3\}$ . △

**Ισχυρισμός 2.12.** Δεν υπάρχουν  $w_1, w_2 \in \bigcap_{v \in N(u)} N(v) \setminus \{u\}$  τέτοια ώστε είτε  $w_1 w_2 \in E(G)$  ή  $\deg(w_1) = 6 = \deg(w_2)$ .

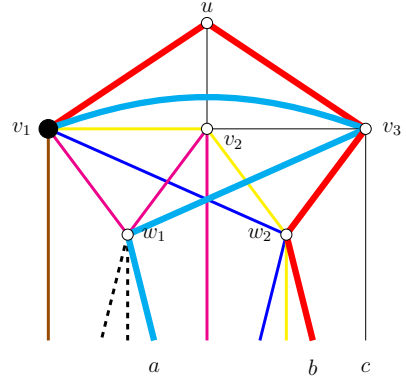
*Απόδειξη ισχυρισμού.* Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο ζευγάρι  $w_1, w_2$ . Σχηματίζουμε ένα καινούριο γράφημα  $G'$  αντιστοιχίζοντας το σύνολο  $N[u] \cup \{w_1, w_2\}$  σε μια νέα κορυφή  $u'$ . Με βάση τους προηγούμενους Ισχυρισμούς 2.5, 2.7, 2.10 προκύπτει η σχέση:  $5 \leq d(u') \leq 9$  (άρα το  $G'$  μπορεί να έχει το πολύ τέσσερις παράλληλες κλάσεις). Επομένως, το  $G$  έχει μια κορυφή μη-γειτονική με τη  $N(u)$ , αφού η  $N(u)$  έχει τουλάχιστον έναν και το πολύ τρεις γείτονες έξω από το σύνολο  $N[u] \cup \{w_1, w_2\}$ . Οπότε, υπάρχουν τουλάχιστον έξι κορυφές στο  $G'$ . Συνεπώς, υπάρχει μια εμβύδιση  $K_7$  στο  $G'$ , μέσω της οποίας μπορεί να βρεθεί μια εμβύδιση  $K_7$  και στο  $G$ .

Εξετάζοντας την περίπτωση όπου η  $u'$  δεν αποτελεί κορυφή της  $K_7$ -κλίκας, θα ισχύει ότι η εμβύδιση στο  $G'$  είναι και εμβύδιση στο  $G$ , άτοπο. Ειδικότερα, η  $u'$  θα ήταν κορυφή διακλάσωσης και θα ίσχυε ότι  $6 \leq d(u') \leq 9$ . Το πιο “περίπλοκο” σενάριο είναι όταν  $\deg(u') = 9$  και οκτώ από τις ακμές γειτονικές με την  $u'$  χρησιμοποιούνται για το  $K_7$ . Μελετώντας το σενάριο, διακρίνονται τέσσερις περιπτώσεις ανάλογα με το ποιο ζευγάρι κορυφών (γείτονες της  $u'$ ) ανυψώνεται για να δημιουργηθεί μια νέα ακμή. Πιο περιγραφικά, οι περιπτώσεις που απεικονίζονται αντιστοίχως στα Σχήματα 2.9, 2.10, 2.11, 2.12 είναι οι εξής: και οι δύο ακμές γειτονεύουν με τη  $w_1$ , μία από τις δύο γειτονεύει με τη  $w_1$  και η άλλη με τη  $w_2$ , μία από τις δύο γειτονεύει με τη  $w_1$  και η άλλη με τη  $N(u)$  και τέλος και οι δύο ακμές γειτονεύουν με τη  $N(u)$ .

Και στις τέσσερις περιπτώσεις τα έντονα-χρωματισμένα μονοπάτια αναπαριστούν τη γειτονιά της κορυφής που ανήκει στην κλίκα  $K_7$ . Κάθε περίπτωση χωρίζεται σε δύο ή τρεις υποπεριπτώσεις ανάλογα με το ποια από τις ακμές  $a$ ,  $b$  (ή  $c$ ) είναι περισευούμενη, δηλαδή δε χρησιμοποιείται στον σχηματισμό του  $K_7$ . Μέσω των σχημάτων, επιβεβαιώνεται ότι σε όλες τις υποπεριπτώσεις μπορεί εύκολα να βρεθεί εμβύδιση  $K_7$  στο  $G$ .

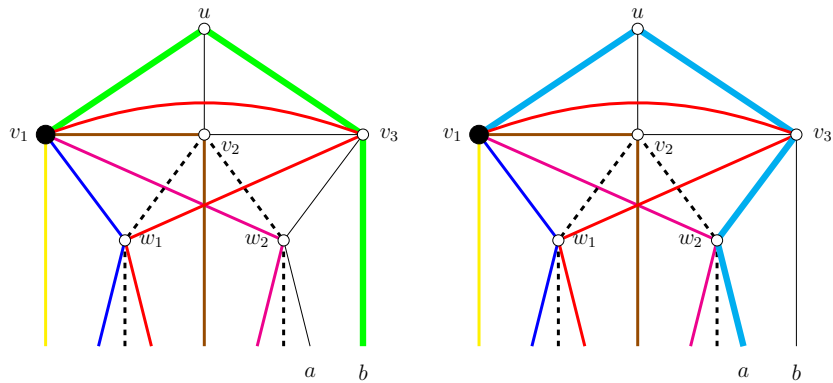


(α') Περισσευόμενη ακμή  $a$       (β') Περισσευόμενη ακμή  $b$



(γ) Περισσευόμενη ακμή  $c$

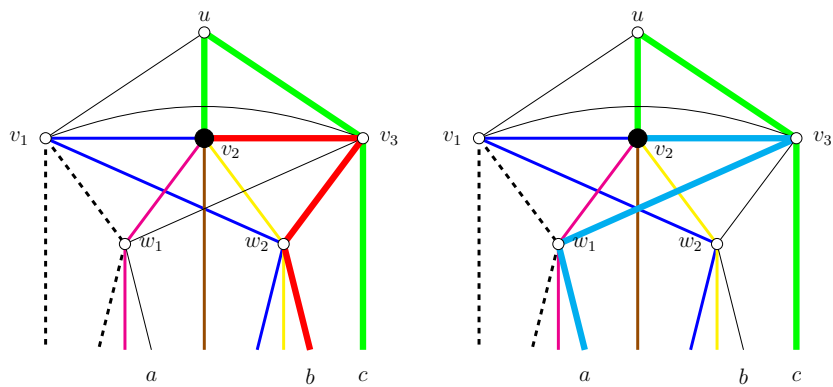
Σχήμα 2.9: 1<sup>η</sup> περίπτωση Ισχυρισμού 2.12



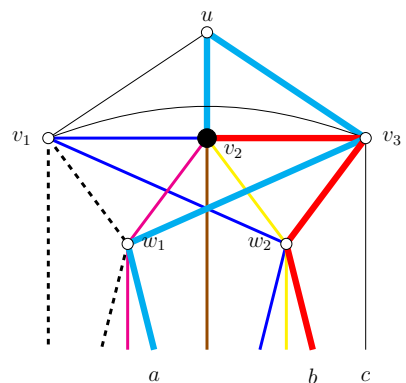
(α') Περισσευόμενη ακμή  $a$       (β') Περισσευόμενη ακμή  $b$

Σχήμα 2.10: 2<sup>η</sup> περίπτωση Ισχυρισμού 2.12

△

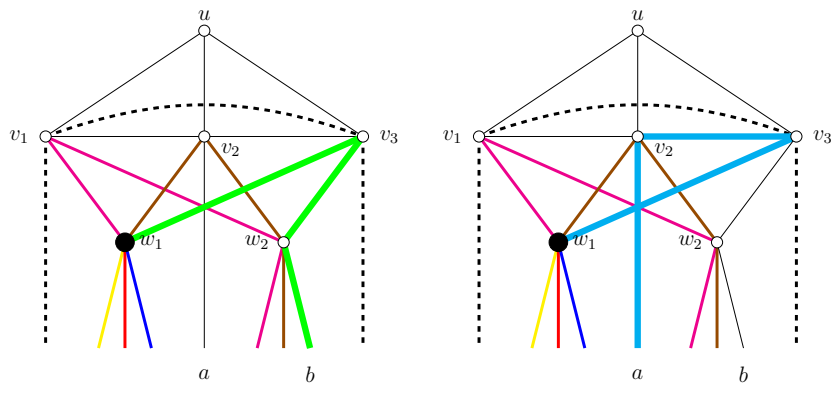


(α) Περισσευόμενη ακμή  $a$       (β') Περισσευόμενη ακμή  $b$



(γ) Περισσευόμενη ακμή  $c$

Σχήμα 2.11: 3<sup>η</sup> περίπτωση Ισχυρισμού 2.12



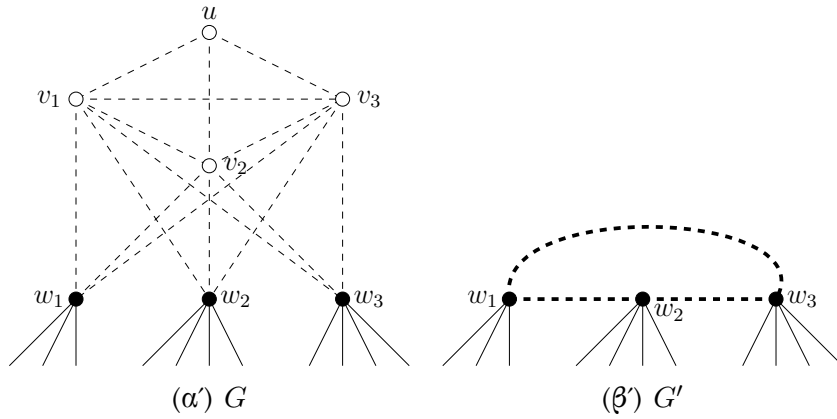
(α) Περισσευόμενη ακμή  $a$       (β') Περισσευόμενη ακμή  $b$

Σχήμα 2.12: 4<sup>η</sup> περίπτωση Ισχυρισμού 2.12

**Ισχυρισμός 2.13.**  $|\bigcap_{v \in N(u)} N(v) \setminus \{u\}| \leq 2$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Ας παρατηρήσουμε πως αφού  $\deg(v) = d = 6$  για κάθε  $v \in N(u)$  και το σύνολο  $N[u]$  αποτελεί μια κλίκα  $K_4$ , ισχύει ότι απομένουν τρεις ακμές προς εξέταση για κάθε  $v \in N(u)$ . Οπότε,  $|\bigcap_{v \in N(u)} N(v) \setminus \{u\}| \leq 3$ .

Υποθέτουμε (προς άτοπο) πως  $|\bigcap_{v \in N(u)} N(v) \setminus \{u\}| = \{w_1, w_2, w_3\}$ . Από τον Ισχυρισμό 2.12, συνεπάγεται ότι το σύνολο  $\{w_1, w_2, w_3\}$  είναι ανεξάρτητο και το πολύ μία εκ των κορυφών έχει βαθμό έξι, έστω  $d(w_1) = 6$  όπως απεικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα 2.13. Δημιουργούμε ένα νέο γράφημα  $G'$  από το  $G$  διαγράφοντας τη  $N[u]$  και προσδέτοντας τις  $w_1w_2$ ,  $w_2w_3$  και  $w_3w_1$ . Το γράφημα  $G'$  είναι απλό με τουλάχιστον έξι κορυφές όπου το πολύ μια από αυτές έχει βαθμό αυστηρά μικρότερο από έξι. Συνεπώς, υπάρχει εμβύθιση  $K_7$  στο  $G'$  επομένως υπάρχει και στο  $G$ , καταλήγοντας στην επιθυμητή αντίφαση.  $\triangle$

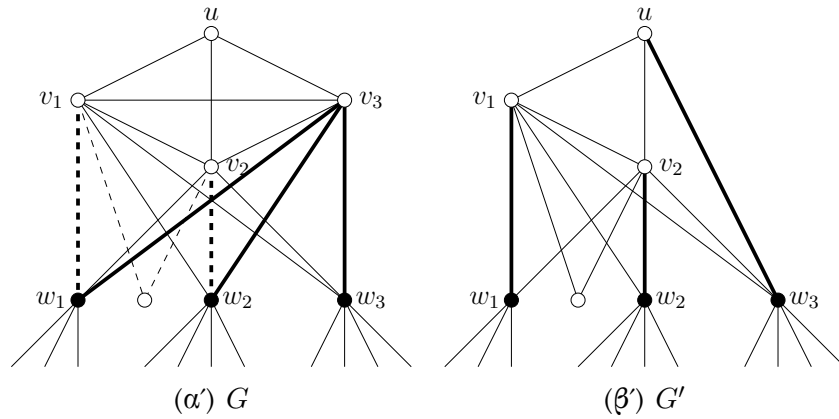


Σχήμα 2.13: Εμβύθιση  $K_7$  στο  $G'$

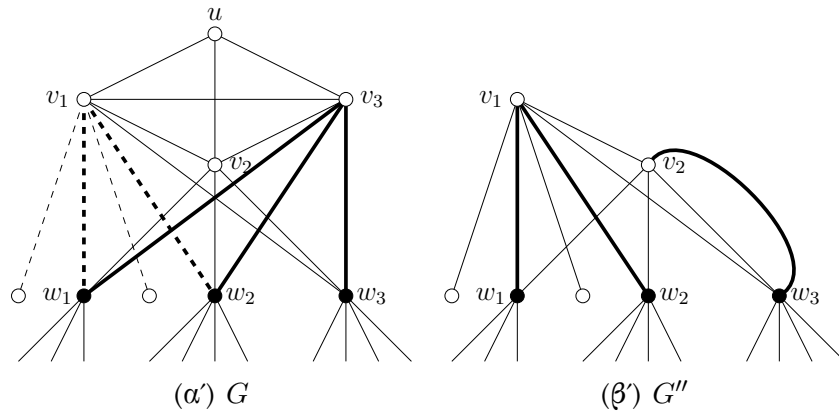
**Ισχυρισμός 2.14.** Για κάθε  $v \in N(u)$   $|N(v)| \leq 5$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Ας υποθέσουμε ότι  $N(v_3) = \{u, v_1, v_2, w_1, w_2, w_3\}$ . Αρχικά, θεωρούμε ότι  $v_1w_1, v_2w_2 \notin E(G)$ . Σχηματίζουμε το γράφημα  $G'$  μέσω του  $G$  διαγράφοντας την  $v_3$  και προσδέτοντας τις ακμές  $v_1w_1$ ,  $v_2w_2$ , και  $uw_3$ . Τότε, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.14, το  $G'$  είναι εμβύθιση στο  $G$  το οποίο και αποτελεί αντίφαση.

Έπειτα, θεωρούμε ότι  $v_1w_1, v_1w_2 \notin E(G)$ . Λόγω της προηγούμενης παρατήρησης του Ισχυρισμού 2.14, υποθέτουμε πως  $v_2w_1, v_2w_2, v_2w_3 \in E(G)$ . Επομένως, έπεται ότι οι κορυφές  $v_2$  και  $v_3$  έχουν έξι διακεκριμένους γείτονες, οπότε από τον Ισχυρισμό 2.11 προκύπτει πως το  $G$  είναι απλό. Οπότε, το γράφημα  $G''$  που δημιουργείται από το  $G$  διαγράφοντας τις  $u, v_3$  και προσδέτοντας τις ακμές  $v_1w_1$ ,  $v_1w_2$  και  $v_2w_3$  παράλληλα στην ήδη υπάρχουσα ακμή, είναι εμβύθιση στο  $G$ . Συνεπώς, το γράφημα  $G''$  είναι μικρότερο αντιπαράδειγμα (με ειδική κορυφή τη  $v_2$ ), όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.15.

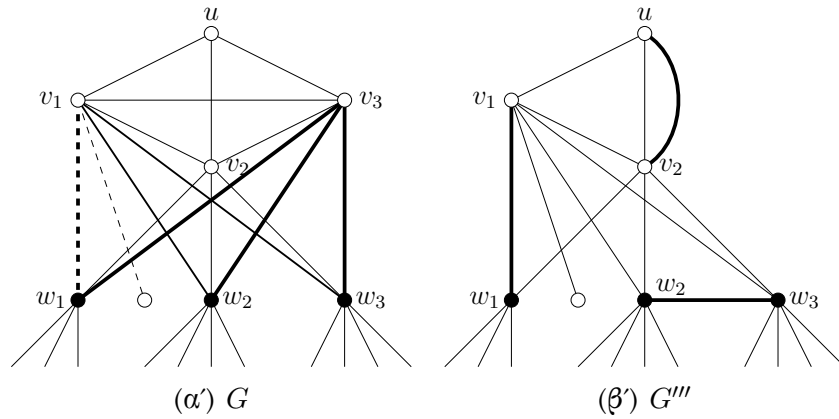


Σχήμα 2.14: Αντιπαράδειγμα  $G'$  όπου  $v_1w_1, v_2w_2 \notin E$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύθισης  $K_7$



Σχήμα 2.15: Αντιπαράδειγμα  $G''$  όπου  $v_1w_1, v_1w_2 \notin E$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύθισης  $K_7$

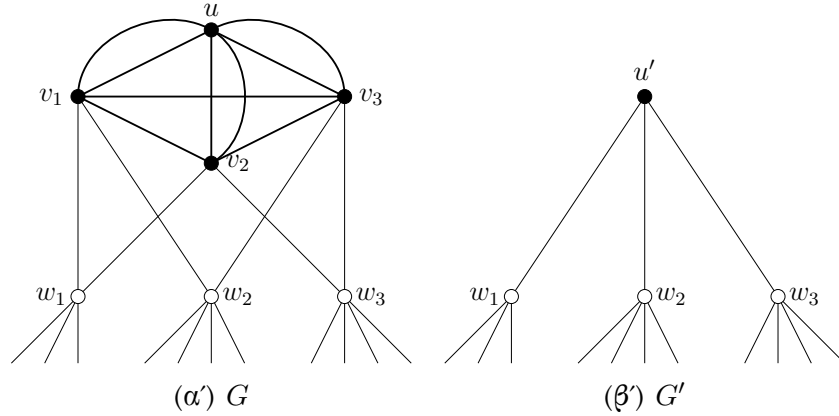
Συνδυάζοντας τα δύο προαναφερθέντα αποτελέσματα των προηγούμενων ισχυρισμών, θεωρούμε ότι  $v_1w_2, v_1w_3, v_2w_2, v_2w_3 \in E$ . Ακόμη, λόγω του Ισχυρισμού 2.13 υποθέτουμε πως  $v_1w_1 \notin E$ , και μέσω του Ισχυρισμού 2.12 πως  $w_2w_3 \notin E$ . Παρόμοια με το προηγούμενο επιχείρημα, σχηματίζουμε το γράφημα  $G'''$  που προέρχεται από το  $G$  διαγράφοντας την  $v_3$  και προσδίδοντας τις ακμές  $v_1w_1, w_2w_3, uv_2$ . Έπεται ότι το  $G'''$  αποτελεί εμβύθιση στο  $G$ , συνεπώς το γράφημα  $G'''$  που απεικονίζεται στο ακόλουθο Σχήμα 2.16, καταλήγει σε αντίφαση, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του Ισχυρισμού 2.14.



Σχήμα 2.16: Αντιπαράδειγμα  $G'''$  όπου  $v_1w_2, v_1w_3, v_2w_2, v_2w_3 \in E$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύθισης  $K_7$

△

Κλείνοντας, από τον Ισχυρισμό 2.14 συνεπάγεται ότι κάθε γείτονας της  $u$  γειτονεύει με μια παράλληλη κλάση. Τέλος, από τους Ισχυρισμούς 2.5, 2.7, 2.10 έπεται ότι το γράφημα που σχηματίζεται από το  $G$  αντιστοιχίζοντας το σύνολο  $N[u]$  σε μια μόνο κορυφή  $u'$  και διαγράφοντας θηλιές, αποτελεί εμβύθιση στο  $G$ . Αυτό το τελικό γράφημα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.17, είναι όντως μικρότερο σε μέγεθος αντιπαράδειγμα, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη. □



Σχήμα 2.17: Τελικό αντιπαράδειγμα  $G'$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι πέρα από την απόδειξη των DeVos, Kawarabayashi, Mohar και Okamura [9], που μόλις παρουσιάστηκε, οι Lescure και Meyniel [22] έχουν παρουσιάσει μια διαφορετική απόδειξη για τις περιπτώσεις  $d = 5, 6$ . Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε στη δημοσίευσή τους, έχουν ήδη βρει μια απόδειξη για την περίπτωση  $d = 7$  αλλά δεν έχει δημοσιευτεί εξαιτίας του μήκους της.





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΕΜΒΥΘΙΣΕΙΣ ΠΛΗΡΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

#### 3.1 Γραφήματα χωρίς εμβυθίσεις $K_8, K_9, K_{11}$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποδείξαμε ότι η εικασία βαθμού εμβύθισης όπου  $d(t) = t - 1$  αληθεύει όταν  $t \leq 7$ . Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε ότι η εικασία δεν αληθεύει για  $t \in \{8, 9, 11\}$ . Για το σκοπό αυτό, θα βασιστούμε στον ορισμό της εμβύθισης μέσω μονοπατιών.

**Ορισμός 3.1** (Γωνίες και Πάσσαλοι). Σε μια εμβύθιση οι κορυφές που αποτελούν εικόνες του μονομορφισμού ονομάζονται *γωνίες* ενώ οι κορυφές που βρίσκονται σε αυτά τα μονοπάτια και δεν αποτελούν άκρα του ονομάζονται *πάσσαλοι*.

Υποστηρίζουμε ότι όλες οι γωνίες μιας εμβύθισης  $K_t$  θα πρέπει να είναι συγκεντρωμένες σε ένα μέρος του γραφήματος. Ξεκινάμε με ένα λήμμα που μας βοηθά να προσδιορίσουμε που βρίσκονται οι κορυφές μιας εμβύθισης σε σχέση με το αρχικό γράφημα.

**Λήμμα 3.2.** Έστω ένα γράφημα  $G$  και μια διαμέριση των ακμών  $C$  στο  $G$ , τέτοια ώστε  $|C| \leq t - 2$ . Έστω ένα υπογράφημα  $M$  το οποίο αποτελεί μια συνεκτική συνιστώσα του  $G \setminus C$ . Εάν υπάρχει εμβύθιση  $K_t$  στο  $G$ , τότε όλες οι γωνίες βρίσκονται είτε στο  $V(M)$  είτε στο  $V(G \setminus M)$ .

*Απόδειξη.* Έστω ένα γράφημα  $G$  και ένα υπογράφημα  $M$  όπως περιγράφεται στο Λήμμα 3.2. Υποθέτουμε ότι το  $G$  έχει μια εμβύθιση  $K_t$  και ότι κάποιες γωνίες βρίσκονται στο  $V(M)$  ενώ οι υπόλοιπες στο  $V(G \setminus M)$ . Εξ' ορισμού οι γωνίες συνδέονται με ακμο-διακεκριμένα μονοπάτια και κάθε μονοπάτι από το  $V(M)$  στο  $V(G \setminus M)$  χρησιμοποιεί μια ακμή του  $C$ . Δεδομένου ότι συνολικά οι γωνίες είναι  $t$  σε πλήθος, αν οι  $x$  από αυτές βρίσκονται στο  $V(M)$  με  $1 \leq x \leq t - 1$ , τότε υπάρχουν  $x(t - x)$  ακμο-διακεκριμένα μονοπάτια που συνδέουν τις γωνίες του  $M$  και του  $G \setminus M$ . Ως εκ τούτου, θα ισχύει  $x(t - x) \leq t - 2$ , δηλαδή

$$-x^2 + tx - t + 2 \leq 0$$

που είναι αδύνατο για τα  $1 \leq x \leq t - 1$ . Από την αντίφαση που καταλήξαμε, έπεται ότι όλες οι γωνίες πρέπει να είναι είτε στο  $V(M)$  είτε στο  $V(G \setminus M)$ .  $\square$

Το Λήμμα 3.2 είναι χρήσιμο γιατί αν ξέρουμε ότι το γράφημα  $G$  έχει μια εμβύδιση  $K_t$ , τότε όλες οι γωνίες θα βρίσκονται σε ένα μέγιστο  $t - 1$ -ακμο-συνεκτικό υπογράφημα του  $G$ . Το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού θα καταφέρουμε να κατασκευάσουμε γραφήματα με όλες τις γωνίες σε τέτοιο υπογράφημα χωρίς να υπάρχει όμως εμβύδιση  $K_t$ .

**Λήμμα 3.3.** Εάν το γράφημα  $G$  έχει μια εμβύδιση  $K_t$  σε ένα σύνολο γωνιών  $J$ , τότε το  $G$  έχει μια εμβύδιση  $K_t$  στο  $J$  έτσι ώστε οι ακμές μεταξύ γειτονικών κορυφών στο  $J$  να χρησιμοποιούνται ως μονοπάτια αυτών των κορυφών.

**Λήμμα 3.4.** Εάν το γράφημα  $G$  έχει μια εμβύδιση  $K_t$  και μια γωνία της εμβύδισης έχει βαθμό το πολύ  $t$ , τότε αυτή η κορυφή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως πάσσαλος στην εμβύδιση.

*Απόδειξη.* Έστω ένα γράφημα  $G$  που έχει μια εμβύδιση  $K_t$  και  $v$  μια γωνία της εμβύδισης με βαθμό το πολύ  $t$ . Συνολικά υπάρχουν  $t$  γωνίες στην εμβύδιση. Αφού η  $v$  είναι γωνία, ο βαθμός της μπορεί να είναι είτε  $t$  ή  $t - 1$ . Από το γεγονός ότι οι  $t - 1$  ακμές της  $v$  χρησιμοποιούνται ως μονοπάτια μεταξύ της  $v$  και των άλλων γωνιών, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το πολύ μια ακμή που ενώνεται με την  $v$ , άρα η  $v$  δεν αποτελεί πάσσαλο.  $\square$

Για να δείξουμε ότι η εικασία δεν αληθεύει για  $t \in \{8, 9, 11\}$ , θα κατασκευάσουμε γραφήματα με ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  που δεν έχουν εμβύδιση  $K_t$ . Η κατασκευή αυτή θα στηριχθεί σε εξέδρες, αποβάδρες και όρμους όπως ορίζονται παρακάτω. Στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείχθηκε ότι ένα γράφημα με ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  έχει εμβύδιση  $K_t$  για  $t \leq 7$ , έτσι θα είναι αδύνατο να βρούμε εξέδρες όταν  $t \leq 7$ .

**Ορισμός 3.5 (Εξέδρα).** Ως  $t$ -εξέδρα καλείται ένα γράφημα στο οποίο κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον  $t - 2$ , με τις κορυφές που έχουν βαθμό ακριβώς  $t - 2$  να είναι το πολύ  $t - 2$ .

Αρκεί να σημειώσουμε ότι μια εξέδρα δε μπορεί να έχει εμβύδιση  $K_t$  ακόμη και αν προστεθεί ένα μέγιστο ταίριασμα κορυφών βαθμού  $t - 2$ . Η πρόσδεση ενός ταίριασματος μεταξύ κορυφών βαθμού  $t - 2$  μπορεί να δημιουργήσει πολλαπλές ακμές.

Όταν θα εξετάζουμε μια εμβύδιση σε ένα μεγαλύτερο γράφημα, το ταίριασμα στην εξέδρα θα αντιπροσωπεύει τα μονοπάτια που μπορούν να ανυψωθούν έξω από την εξέδρα για να δημιουργήσουν περισσότερες συνδέσεις μεταξύ κορυφών της εξέδρας.

**Ορισμός 3.6 (Αποβάδρα).** Ως  $t$ -αποβάδρα καλείται ένα γράφημα με το πολύ  $t - 2$  σε πλήθος κορυφές.

**Ορισμός 3.7 (Όρμος).** Ως  $t$ -όρμος καλείται ένα γράφημα που αποτελείται από μία ή περισσότερες  $t$ -αποβάδρες διατεταγμένες σε κύκλο έτσι ώστε να μην υπάρχουν περισσότερες από  $t - 3$  ακμές μεταξύ δύο διαδοχικών  $t$ -αποβάδρων, και καμία ακμή μεταξύ μη-διαδοχικών  $t$ -αποβάδρων.

Παρατηρούμε ότι, ένας  $t$ -όρμος με δύο  $t$ -αποβάθρες μπορεί να έχει  $2(t - 3)$  άκρες μεταξύ των  $t$ -αποβάθρων. Μια  $t$ -εξέδρα προστίθεται σε μια  $t$ -αποβάθρα αν προσθέσουμε μια ακμή από κάθε κορυφή βαθμού  $t - 2$  της  $t$ -εξέδρας σε μια κορυφή της  $t$ -αποβάθρας.

**Ορισμός 3.8** (Πλήρης αποβάθρα). Μια  $t$ -αποβάθρα σε έναν  $t$ -όρμο καλείται πλήρης εάν έχουν προστεθεί  $t$ -εξέδρες με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε κορυφή της  $t$ -αποβάθρας να έχει βαθμό τουλάχιστον  $t - 1$ .

**Θεώρημα 3.9.** Έστω  $G_t$  ένας  $t$ -όρμος του οποίου κάθε  $t$ -αποβάθρα είναι πλήρης. Ο όρμος  $G_t$  έχει ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  αλλά δεν έχει εμβύδιση  $K_t$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $G_t$  ένας  $t$ -όρμος του οποίου κάθε  $t$ -αποβάθρα είναι πλήρης και  $v \in V(G_t)$ . Θα ισχύει ένα από τα εξής δύο: η  $v$  θα βρίσκεται είτε σε μια  $t$ -εξέδρα ή σε μια  $t$ -αποβάθρα. Εάν η  $v$  βρίσκεται σε μια  $t$ -εξέδρα, τότε εξ' ορισμού ο βαθμός της μέσα στην  $t$ -εξέδρα είναι μεγαλύτερος ή ίσος με  $t - 2$ . Αν ο βαθμός είναι  $t - 2$ , τότε από την προσθήκη μιας  $t$ -εξέδρας σε μια  $t$ -αποβάθρα, θα υπάρχει μια ακμή από την  $v$  σε μια αποβάθρα, οπότε ο βαθμός της  $v$  στο  $G_t$  είναι  $t - 1$ . Έτσι, αν η  $v$  βρίσκεται σε μια  $t$ -εξέδρα έχει βαθμό τουλάχιστον  $t - 1$ . Εάν η  $v$  βρίσκεται σε μια  $t$ -αποβάθρα, η οποία είναι πλήρης, έπεται ότι θα έχει βαθμό τουλάχιστον  $t - 1$ . Ως εκ τούτου, το  $G_t$  θα έχει ελάχιστο βαθμό  $t - 1$ .

Ας υποθέσουμε ότι το  $G_t$  έχει μια εμβύδιση  $K_t$ . Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.2 διαπιστώνουμε ότι όλες οι γωνίες βρίσκονται είτε σε μια  $t$ -εξέδρα ή στον  $t$ -όρμο. Οι υποθέσεις του λήμματος ικανοποιούνται αφού υπάρχουν το πολύ  $t - 2$  ακμές μεταξύ οποιασδήποτε  $t$ -εξέδρας και του  $t$ -όρμου και ακόμη δεν υπάρχουν ακμές ανάμεσα στις  $t$ -εξέδρες. Στην περίπτωση που όλες οι γωνίες βρίσκονται σε μια  $t$ -εξέδρα, αυτή η εξέδρα θα είχε μια εμβύδιση  $K_t$ , γεγονός που καταλήγει σε αντίφαση από τον ορισμό της  $t$ -εξέδρας. Αν οι ακμές έξω από την  $t$ -εξέδρα έδιναν μονοπάτια τα οποία ανυψωμένα δημιουργούσαν μέγιστο ταίριασμα κορυφών βαθμού  $t - 2$ , πάλι δεν θα υπήρχε εμβύδιση  $K_t$  εξ' ορισμού της  $t$ -εξέδρας.

Έπεται ότι όλες οι γωνίες βρίσκονται στον  $t$ -όρμο. Ο  $t$ -όρμος δεν μπορεί να έχει λιγότερες από  $t$  κορυφές, έτσι υποθέτουμε ότι έχει τουλάχιστον  $t$  κορυφές. Οι γωνίες δεν μπορούν να είναι όλες στην ίδια  $t$ -αποβάθρα, επειδή οι  $t$ -αποβάθρες έχουν το πολύ  $t - 2$  κορυφές. Επομένως, οι  $t$  γωνίες χωρίζονται σε τουλάχιστον δύο  $t$ -αποβάθρες. Θα εξετάσουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

- (1) υπάρχει μια  $t$ -αποβάθρα με  $k$  γωνίες όπου  $2 \leq k \leq t - 2$ , ή
- (2) υπάρχει το πολύ μία γωνία ανά  $t$ -αποβάθρα.

- Στην πρώτη περίπτωση, έστω  $A$  η αποβάθρα με  $k$  γωνίες όπου  $2 \leq k \leq t - 2$ . Υπάρχουν το πολύ  $2(t - 3)$  ακμές από την  $A$  στις γειτονικές αποβάθρες, οπότε για να σχηματιστούν ακμο-διακεκριμένα μονοπάτια από τις  $k$  γωνίες στις υπόλοιπες γωνίες του όρμου πρέπει να ισχύει

$$k(t - k) \leq 2(t - 3) \rightarrow -t^2 + kt - 2t + 6 \leq 0.$$

Όμως το πολυώνυμο  $-t^2 + kt - 2t + 6$  είναι θετικό όταν  $2 \leq k \leq t - 2$ , άρα άτοπο. Συνεπάγεται ότι δεν υπάρχουν ακμο-διακεκριμένα μονοπάτια και άρα ούτε και εμβύδιση  $K_t$ .

- Στη δεύτερη περίπτωση, έστω  $A_1$  μια αποβάθρα με μία γωνία. Έστω  $A_n$  η επόμενη αποβάθρα (με τη φορά του ρολογιού) που περιέχει μια γωνία. Ορίζουμε  $H$  το υπογράφημα του  $G$  που ενάγεται από την ένωση των  $A_i, 1 \leq i \leq n$ . Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν το πολύ  $2(t-3)$  ακμές που συνδέουν γωνίες του  $H$  με γωνίες του  $G_t \setminus H$ . Από το γεγονός ότι το  $H$  περιέχει δυο γωνίες, για να υπάρχει μια εμβύδιση  $K_t$ , πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον  $2(t-2)$  ακμο-διακεκριμένα μονοπάτια από το  $H$  στο  $G_t \setminus H$ , δηλαδή  $2(t-2) \leq 2(t-3)$ , καταλήγοντας σε αντίφαση.

Επομένως, δεν υπάρχει εμβύδιση  $K_t$  με όλες τις γωνίες να βρίσκονται στον όρμο και άρα δεν υπάρχει γενικά εμβύδιση  $K_t$  στο  $G_t$ .  $\square$

**Ορισμός 3.10** (Σημαδούρα). Έστω  $P$  ένα απλό γράφημα με  $t+1$  κορυφές και ελάχιστο βαθμό  $t-2$  έτσι ώστε το πολύ  $t-2$  κορυφές να έχουν βαθμό ακριβώς  $t-2$ . Χωρίζουμε τις κορυφές σε δύο σύνολα, και όπου  $A = \{v \in V(P) : \deg(v) = t-2\}$  και  $B = V(P) \setminus A$ . Ως *σημαδούρα* καλείται είτε ένας υπολειπόμενος περιττός κύκλος στο  $A$  ή ένα υπολειπόμενο μονοπάτι μήκους δύο με άκρα κορυφές στο  $B$  και ενδιάμεση κορυφή στο  $A$ .

**Θεώρημα 3.11.** Έστω  $P$  ένα απλό γράφημα με  $t+1$  κορυφές και ελάχιστο βαθμό  $t-2$  έτσι ώστε το πολύ  $t-2$  κορυφές να έχουν βαθμό ακριβώς  $t-2$ . Εάν το  $P$  έχει τρεις ή περισσότερες σημαδούρες, τότε το  $P$  είναι μια  $t$ -εξέδρα.

*Απόδειξη.* Έστω  $P$  ένα απλό γράφημα με τρεις ή περισσότερες σημαδούρες όπου  $|V(P)| = t+1$ . Θα ισχύει  $t-2 \leq \deg(v) \leq t$  για κάθε  $v \in V(P)$ . Από το γεγονός ότι  $|A| \leq t-2$ , το  $P$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις ως προς το βαθμό για να είναι  $t$ -εξέδρα. Δημιουργούμε ένα νέο γράφημα  $P^+$  προσθέτοντας ένα μέγιστο ταιρίασμα στις κορυφές του  $A$ . Ας υποθέσουμε ότι το  $P^+$  έχει μια εμβύδιση  $K_t$ . Αφού οι σημαδούρες είναι είτε υπολειπόμενοι περιττοί κύκλοι ή έχουν υπολοιπόμενες ακμές μεταξύ των  $A$  και  $B$ , η πρόσδεση του ταιριάσματος στο  $A$  αφήνει τουλάχιστον μία κορυφή σε κάθε μια από τις τρεις σημαδούρες με δύο υπολοιπόμενες ακμές. Έστω  $x, y$  και  $z$  οι τρεις κορυφές των τριών σημαδούρων αντίστοιχα. Από τα Λήμματα 3.3 και 3.4 έπεται ότι το  $P^+$  έχει ακριβώς έναν πάσσαλο που δεν είναι γωνία. Έστω  $w$  αυτός ο πάσσαλος. Επομένως υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημαδούρες οι οποίες δεν περιέχουν τον πάσσαλο  $w$ .

- Έστω ότι  $w \in B$ . Χωρίς απώλεια της γενικότητας, έστω ότι ο πάσσαλος  $w$  δεν περιέχεται στην σημαδούρα που περιλαμβάνει την κορυφή  $x$ . Ως εκ τούτου, ο πάσσαλος  $w$  πρέπει να χρησιμοποιηθεί σε ακμο-διακεκριμένα μονοπάτια για να αντικαταστήσει και τις δύο υπολοιπόμενες ακμές της  $x$ . Δεδομένου ότι υπάρχει το πολύ ένα μονοπάτι (ουσιαστικά ακμή) από τον πάσσαλο  $w$  στην κορυφή  $x$  που δεν χρησιμοποιείται από την εμβύδιση, ο πάσσαλος  $w$  μπορεί τελικά να χρησιμοποιηθεί για να αντικαταστήσει το πολύ μια ακμή της  $x$ , δηλαδή  $w \notin B$ .

- Έπεται ότι  $w \in A$ . Χωρίς απώλεια της γενικότητας, έστω ότι ο πάσσαλος  $w$  δεν περιέχεται στις σηματοδούρες που περιλαμβάνουν τις κορυφές  $x$  και  $y$ . Για να υπάρχει μια εμβύδιση  $K_t$ , πρέπει να χρησιμοποιηθούν ακμο-διακεκριμένα μονοπάτια μέσω της γωνίας  $w$  για να αντικαταστήσουν τις δύο υπολοιπούμενες ακμές της  $x$  και τις δύο υπολοιπούμενες ακμές της  $y$ . Χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το ταίριασμα, υπάρχει μια αχρησιμοποίητη ακμή από την  $w$  στην κορυφή  $x$  και άλλη μια από την  $w$  στην  $y$ . Επομένως, για να αντικατασταθούν και οι τέσσερις υπολοιπούμενες ακμές πρέπει να χρησιμοποιηθούν τα μονοπάτια  $w-u-x$  και  $w-u-y$  τα οποία δεν είναι ακμο-διακεκριμένα. Η αντίφαση αυτή αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει εμβύδιση  $K_t$  στο  $P^+$ , δηλαδή το  $P$  είναι μια  $t$ -εξέδρα.

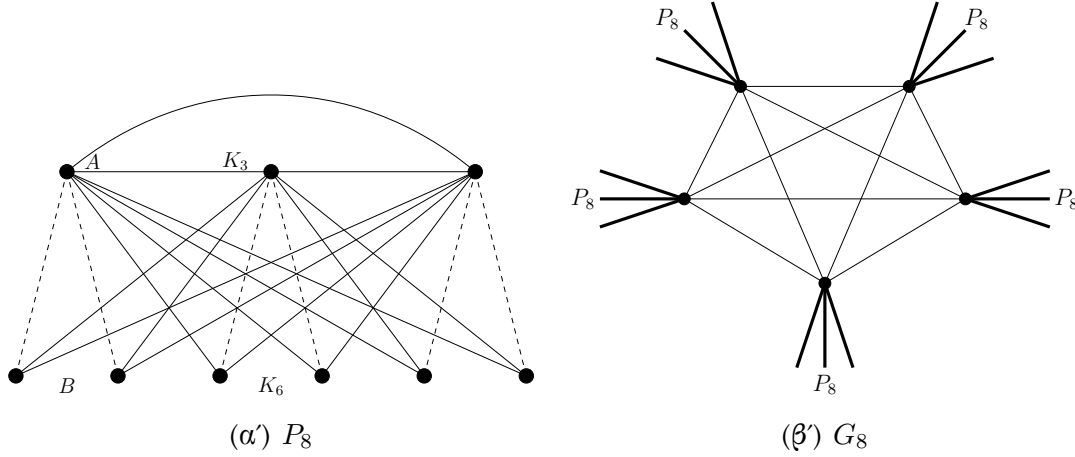
□

Έχοντας δώσει γενικές κατασκευές για γραφήματα χωρίς εμβύδιση  $K_t$  με ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  θα παραδέσουμε στη συνέχεια συγκεκριμένα παραδείγματα και θα εξετάσουμε μερικά από τα χαρακτηριστικά αυτών των παραδειγμάτων. Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε ότι το Θεώρημα 2.1 αληθεύει για  $t \in \{5, 6, 7\}$  μέσω της εκτενούς απόδειξης του Θεωρήματος 2.2 για  $t \in \{5, 6, 7\}$ . Στην απόδειξη εκείνη, υποθέσαμε ότι υπάρχει ένα "μικρότερο" (ως προς  $|V| + |E|$ ) αντιπαράδειγμα  $G$  και παρουσιάσαμε ιδιότητες του  $G$  που οδήγησαν σε άτοπο. Η ιδέα της απόδειξης περιστρέφεται γύρω από μια κορυφή  $u$  που μπορεί να έχει βαθμό μικρότερο από  $t$  της οποίας οι γείτονες σχηματίζουν ένα πλήρες γράφημα σε τρεις κορυφές.

Σε αυτή την ενότητα, δίνουμε παραδείγματα  $t$ -εξέδρων και γραφημάτων για τις τιμές  $t \geq 8$ . Στα αρχικά γραφήματα, οι  $t$ -εξέδρες θα είναι παρόμοιες με το παραπάνω  $G$  χωρίς την κορυφή  $u$ . Στην πρώτη υποενότητα 3.1.1, όσον αφορά την περίπτωση  $t = 8$ , θα δείξουμε ότι τα Θεωρήματα 2.1 και 2.2 δεν μπορούν να επεκταθούν για  $t = 8$ . Έπειτα, στη δεύτερη υποενότητα 3.1.2 θα δώσουμε παραδείγματα για κάθε  $t \geq 8$ . Αυτά τα παραδείγματα θα έχουν χρωματικό αριθμό  $t - 3$  ή  $t - 2$ . Τα πρώτα παραδείγματα θα έχουν ακριβώς μία αποβάθρα. Στη συνέχεια, περιγράφεται ένας απεριόριστος αριθμός παραδειγμάτων για κάθε  $t$  αυξάνοντας τον αριθμό των αποβάθρων στο γράφημα. Αυτά τα γραφήματα θα έχουν χρωματικό αριθμό  $t - 2$  και θα είναι 3-ακμο-συνεκτικά. Τέλος, θα παραδέσουμε παραδείγματα που έχουν ακμο-συνεκτικότητα μέχρι  $t - 2$  και χρωματικό αριθμό  $t - 2$ .

### 3.1.1 Περίπτωση $t = 8$

Για την περίπτωση  $t = 8$  θα σχηματίζουμε το ακόλουθο γράφημα,  $P_8$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Ξεκινάμε με ένα  $K_9$  και αφαιρούμε τρία διακεκριμένα μονοπάτια μήκους δύο.



Σχήμα 3.1: Μια 8-εξέδρα  $P_8$  και ένα  $G_8$

**Λήμμα 3.12.** Το  $P_8$  είναι μια 8-εξέδρα.

*Απόδειξη.* Χωρίζουμε τις κορυφές στα σύνολα  $A = \{v \in V(P_8) : deg(v) = 6\}$  και  $B = V(P_8) \setminus A$ . Επομένως,  $|A| = 3 < 6 = t - 2$ . Τα τρία υπολειπόμενα μονοπάτια μήκους δύο είναι σημαδούρες επειδή έχουν άκρα στο  $B$  ενδιάμεσες κορυφές στο  $A$ . Ως εκ τούτου, από το Θεώρημα 3.11 έπεται ότι το  $P_8$  είναι μια 8-εξέδρα.  $\square$

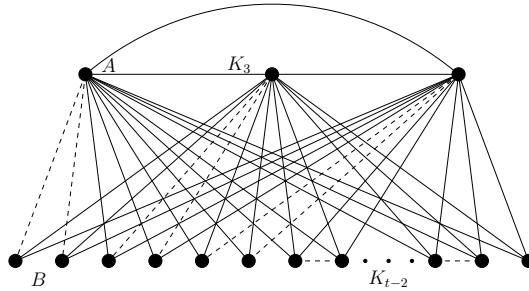
**Θεώρημα 3.13.** Έστω  $G_8$  το γράφημα που έχει μοναδική αποβάθρα το  $K_5$  η οποία είναι πλήρης με τις 8-εξέδρες  $P_8$ . Τότε το  $G_8$  έχει ελάχιστο βαθμό 7 αλλά δεν έχει εμβύδιση  $K_8$ .

*Απόδειξη.* Το  $K_5$  είναι μια αποβάθρα διότι έχει  $5 = t - 3 < t - 2$  κορυφές. Το  $G_8$  πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.9 οπότε συμπεραίνουμε ότι έχει ελάχιστο βαθμό 7 και δεν έχει εμβύδιση  $K_8$ .  $\square$

Ένα πιθανό  $G_8$  απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1 όπου οι 8-εξέδρες συνδέονται με μια κορυφή σχηματίζοντας ένα παράδειγμα που είναι 1-συνεκτικό. Δεδομένου ότι η αποβάθρα στο  $G_8$  είναι ολόκληρο το  $K_5$ , οι 8-εξέδρες,  $P_8$ , μπορούν να προστεθούν έτσι ώστε να συνδέονται σε πολλαπλές κορυφές, οπότε γενικά μπορούν να προστεθούν περισσότερες εξέδρες δημιουργώντας 2 ή 3-συνεκτικά παραδείγματα που ικανοποιούν το Θεώρημα 3.13. Ωστόσο, όλες οι παραλλαγές του  $G_8$  θα πρέπει να είναι 3-ακμο-συνεκτικά γραφήματα. Ο χρωματικός αριθμός του  $G_8$  είναι έξι και το  $G_8$  έχει ένα υπογράφημα του  $K_6$ .

### 3.1.2 Περιπτώσεις $t \geq 8$

Θα κατασκευάσουμε όλα τα παραδείγματά μας με παρόμοιο τρόπο. Θα περιγράψουμε τα γραφήματα  $G_t$  και  $P_t$ . Το  $G_t$  είναι μια πλήρης αποβάθρα. Ξεκινάμε με ένα γράφημα  $K_{t-3}$  ως η μοναδική  $t$ -αποβάθρα σε έναν  $t$ -όρμο και κάνουμε την αποβάθρα πλήρη προσθέτοντας αντίγραφα της  $t$ -εξέδρας  $P_t$ . Για τις τιμές  $t \geq 8$  κατασκευάζουμε το  $P_t$  ως εξής: Ξεκινάμε με ένα  $K_{t+1}$  και αφαιρούμε τρία διακεκριμένα μονοπάτια μήκους δύο. Αφαιρούμε ένα μέγιστο ταίριασμα από τις κορυφές που δεν βρίσκονται σε αυτά τα μονοπάτια. Παρατηρούμε ότι αν το  $t$  είναι περιττός, θα υπάρχει μια κορυφή βαθμού  $t$  στο  $P_t$  όπως εμφανίζεται στο Σχήμα 3.2. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιπροσωπεύουν τις υπολοιπούμενες ακμές.



Σχήμα 3.2: Μία  $t$ -εξέδρα  $P_t$  όπου  $t$  περιττός

**Λήμμα 3.14.** Το γράφημα  $P_t$  είναι μια  $t$ -εξέδρα.

*Απόδειξη.* Όπως και πριν, χωρίζουμε τις κορυφές στα σύνολα  $A = \{v \in V(P_t) : \deg(v) = t - 2\}$  και  $B = V(P_t) \setminus A$ . Οι κορυφές βαθμού  $t - 2$  είναι εκείνες που αποτελούν κέντρα υπολειπόμενων μονοπατιών, οπότε  $|A| = 3 < t - 2$  για  $t \geq 8$ . Τα τρία υπολειπόμενα μονοπάτια είναι σημαδούρες επειδή έχουν άκρα στο  $B$  και ενδιάμεσες κορυφές στο  $A$ . Ως εκ τούτου, από την εφαρμογή του Θεωρήματος 3.11 προκύπτει ότι το  $P_t$  είναι μια  $t$ -εξέδρα.  $\square$

**Θεώρημα 3.15.** Έστω ένα γράφημα  $G_t$  με μοναδική αποβάθρα το  $K_{t-3}$  η οποία πλήρης με αντίγραφα  $P_t$ . Τότε, το  $G_t$  έχει ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  και δεν έχει εμβύδιση  $K_t$ .

*Απόδειξη.* Η μοναδική αποβάθρα του  $G_t$ , το  $K_{t-3}$ , είναι πλήρης. Το Θεώρημα 3.9 ισχύει τετριμμένα άρα το  $G_t$  έχει ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  αλλά δεν έχει εμβύδιση  $K_t$ .  $\square$

Εύκολα παρατηρούμε ότι, για  $t = 8, 9$  ο χρωματικός αριθμός  $\chi(G_t) = t - 2$  και το  $G_t$  έχει ένα υπογράφημα του  $K_{t-2}$ . Ενώ για  $t \geq 10$ , ισχύει ότι  $\chi(G_t) = t - 3$  και το  $G_t$  έχει ένα υπογράφημα του  $K_{t-3}$  και μια εμβύδιση  $K_{t-1}$ . Ως εκ τούτου, το  $G_t$  δε θα μπορούσε να αποτελέσει αντιπαράδειγμα της Εικασίας 1.6. Εξαιτίας της κατασκευής του  $G_t$ , μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα 1, 2, 3-συνεκτικό γράφημα προσθέτοντας εξέδρες σε ακριβώς μια ή περισσότερες κορυφές στην αποβάθρα αντίστοιχα, ωστόσο σε όλες τις περιπτώσεις παίρνουμε ένα 3-ακμο-συνεκτικό γράφημα. Μπορούμε επίσης να δημιουργήσουμε παραδείγματα που έχουν χρωματικό αριθμό  $t - 1$  προσθέτοντας τις εξέδρες  $P_t$  σε ένα μόνο  $K_{t-1}$ . Προσθέτουμε ουσιαστικά μια ακμή από κάθε κορυφή βαθμού  $t - 1$  της εξέδρας  $P_t$  σε μια κορυφή στο  $K_{t-1}$ . Έπειτα από αρκετές προσθήκες καταλήγουμε να συμβαίνει το εξής: κάθε κορυφή στο  $K_{t-1}$  έχει βαθμό τουλάχιστον  $t - 1$ . Ένα τέτοιο γράφημα δεν ανταποκρίνεται στην κατασκευή μας (σχετικά με τις εξέδρες, αποβάθρες και όρμους) διότι το  $K_{t-1}$  έχει πάρα πολλές κορυφές για να είναι αποβάθρα.

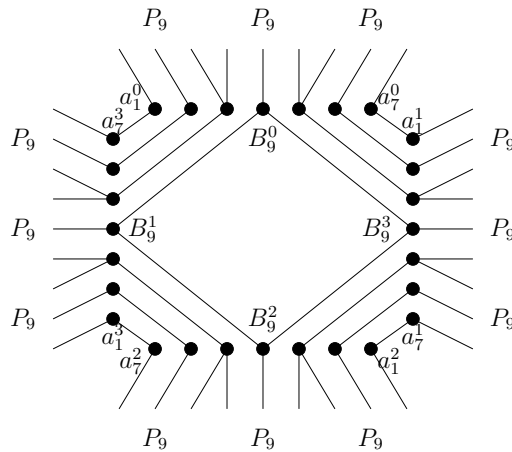
Τα παραδείγματα που δόθηκαν μέχρι στιγμής έχουν ακριβώς μια αποβάθρα σε έναν όρμο. Ας εξετάσουμε περιπτώσεις όπου ο όρμος έχει περισσότερες από μια αποβάθρες. Έστω  $t \geq 8$ , θα κατασκευάσουμε τους όρμους τοποθετώντας  $n$  αντίγραφα  $G_t$  του  $K_{t-2}$  ( $B^0, \dots, B^{n-1}$ ) σε κύκλο. Ο τρόπος που ενώνουμε τα αντίγραφα είναι προσθέτοντας ακμές από τις μισές κορυφές ενός  $B^i$  στις μισές κορυφές του  $B^{i+1}$  και ακμές από τις υπόλοιπες κορυφές του  $B^i$  στις μισές κορυφές του  $B^{i-1}$ . Για ευκολία, θα αναφερόμαστε στις κορυφές των  $B^i$  με τον συμβολισμό  $a_1^i, \dots, a_{t-2}^i$ . Θα συνδέουμε διαδοχικές αποβάθρες προσθέτοντας ακμές μεταξύ των  $B^i$  και  $B^{i-1}$  έτσι ώστε η  $a_j^i$  να είναι γειτονική με τις  $a_{d-1-j}^{i-1}$  για κάθε  $0 \leq i \leq n - 1$  και  $1 \leq j \leq \lceil \frac{t-2}{2} \rceil$ .

**Θεώρημα 3.16.** Έστω  $t \geq 8$  και  $G_t^n$  ένα γράφημα με έναν  $t$ -όρμο που έχει σχηματιστεί όπως περιγράφηκε παραπάνω. Κάθε  $B^i$  γίνεται πλήρες με την προσθήκη από αντίγραφα της  $t$ -εξέδρας  $P_t$ . Τότε, το  $G_t^n$  έχει ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  και δεν έχει εμβύδιση  $K_t$ .

*Απόδειξη.* Τα γράφημα  $B^i$  είναι ουσιαστικά αποβάθρες αφού αποτελούν αντίγραφα του  $K_{t-2}$ , οπότε το πλήθος των ακμών μεταξύ διαδοχικών αποβάθρων είναι  $\lceil \frac{t-2}{2} \rceil$ , έτσι για κάθε  $t \geq 4$  ισχύει  $\lceil \frac{t-2}{2} \rceil \leq \frac{t}{2} \leq t - 3$ . Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.9, έπεται το ζητούμενο, ότι δηλαδή το  $G_t^n$  είναι ένα γράφημα με ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  δίχως εμβύδιση  $K_t$ .  $\square$

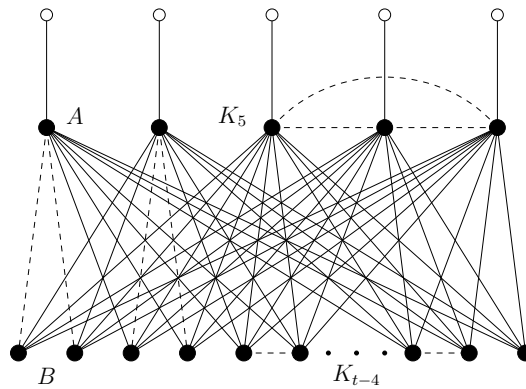
Παρατηρούμε εύκολα, δεδομένου ότι οι αποβάθρες αποτελούν αντίγραφα του  $K_{t-2}$ , ότι ισχύει  $\chi(G_t^n) \geq t - 2$ . Στην πραγματικότητα ισχύει  $\chi(G_t^n) = t - 2$ . Στο Σχήμα 3.3 απεικονίζεται η περίπτωση όπου  $t = 9, n = 4$ , δηλαδή ένας  $t$ -όρμος που αποτελείται από τέσσερις αποβάθρες. Οι κορυφές  $a_3^i, a_4^i, a_5^i$  έχουν βαθμό  $t = 9$  ενώ οι υπόλοιπες κορυφές έχουν βαθμό  $t - 1 = 8$ . Το συγκεκριμένο παράδειγμα  $G_9^4$  που παρουσιάζεται είναι 3-συνεκτικό, αλλά με διαφορετική σύνδεση μπορούν να δημιουργηθούν παραδείγματα με 1, 2-συνεκτικά γράφημα. Σε κάθε περίπτωση, το γράφημα  $G_t^n$  θα είναι πάντα 3-ακμο-συνεκτικό.





Σχήμα 3.3: Ένα  $G_9^4$  σχηματισμένο προσδέτοντας 3 αντίγραφα  $P_9$  σε κάθε αποβάθρα

Ας μελετήσουμε γραφήματα με μεγαλύτερη ακμο-συνεκτικότητα. Θα ξεκινήσουμε με παραδείγματα γραφημάτων με ελάχιστο βαθμό  $t-1$  δίχως εμβύδιση  $K_t$  που είναι 5-ακμο-συνεκτικά και μπορεί να είναι έως και 5-συνεκτικά. Για να πετύχουμε κάτι τέτοιο θα χρειαστεί να τροποποιήσουμε ελαφρώς τις εξέδρες που προστίθενται στις αποβάθρες. Για κάθε  $t \geq 8$  κατασκευάζουμε το γράφημα  $P_t^5$  με τον εξής τρόπο: Από ένα  $K_{t+1}$  αφαιρούμε δύο διακεκριμένα μονοπάτια μήκους δύο και έναν ξένο μεταξύ τους κύκλο μήκους τρία. Αφαιρούμε ένα μέγιστο ταίριασμα από κορυφές που δεν περιέχονται στα μονοπάτια ή κύκλο που αφαιρέθηκαν. Το  $P_t^5$  απεικονίζεται στο Σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Ένα 5-συνεκτικό  $P_t^5$  όπου  $t$  περιττός

**Λήμμα 3.17.** Το γράφημα  $P_t^5$  είναι μια  $t$ -εξέδρα.

*Απόδειξη.* Εστω τα σύνολα  $A = \{v \in V(P_t^5) : \deg(v) = t - 2\}$  και  $B = V(P_t^5) \setminus A$  στα οποία έχουν χωριστεί οι κορυφές, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4. Οι μοναδικές κορυφές βαθμού  $t - 2$  είναι τα κέντρα των δύο υπολοιπόμενων μονοπατιών και οι τρεις κορυφές του υπολοιπόμενου κύκλου. Συνεπώς,  $|A| = 5 < t - 2$  για  $t \geq 8$ . Τα μονοπάτια και ο κύκλος που αφαιρέθηκαν είναι σηματοδούρες ενώ  $|V(P_t^5)| = t + 1$ , οπότε από το Θεώρημα 3.11 συμπεραίνουμε ότι το  $P_t^5$  είναι μια  $t$ -εξέδρα.  $\square$

Εν συνεχεία, για κάθε  $t \geq 8$  κατασκευάζουμε το γράφημα  $H_t^5$  ως εξής: Συνδέοντας διαδοχικά  $n \geq 1$  αποβάθρες ισομορφικές με το  $K_{t-2}$ , τις κάνουμε πλήρεις προσδέτοντας αντίγραφα του  $P_t^5$ . Τα γραφήματα  $H_t^5$  θα είναι 5-ακμο-συνεκτικά ενώ μπορούν να είναι 1, 2, 3, 4 ή 5-συνεκτικά. Ακόμη, τα  $H_t^5$  έχουν υπογραφήματα και ο χρωματικός αριθμός των γραφημάτων  $H_t^5$  είναι  $t - 2$ , άρα θα υπάρχει εμβύδιση  $K_{t-2}$ .

**Θεώρημα 3.18.** Το γράφημα  $H_t^5$  έχει ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  και δεν έχει εμβύδιση  $K_t$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι η συνέπεια της εφαρμογής του Θεωρήματος 3.9 και του Λήμματος 3.17.  $\square$

Για τις τιμές  $t \geq 9$  και  $7 \leq k \leq t - 2$  μας ενδιαφέρει να κατασκευάσουμε παραδείγματα με  $k$ -ακμο-συνεκτικότητα. Για το σκοπό αυτό, μας είναι χρήσιμος ο ορισμός γραφημάτων  $P_t^k$ , δηλαδή  $t$ -αποβάθρες με ακριβώς  $k$  κορυφές βαθμού  $t - 2$ . Ξεκινώντας με ένα  $K_{t+1}$ , περιγράφουμε το  $P_t^k$  ανάλογα με την ισοτιμία του  $k$ .

- Εάν  $k$  είναι περιττός ακέραιος αριθμός, τότε αφαιρούμε ένα μονοπάτι μήκους δύο, έναν 3-κύκλο, και ένα  $C_{k-4}$ , όλα διακεκριμένα μεταξύ τους. Ακόμη, αφαιρούμε ένα μέγιστο ταίριασμα από κορυφές που δεν υπάρχουν ούτε στο μονοπάτι, ούτε στον κύκλο που αφαιρέθηκαν.
- Εάν  $k$  είναι άρτιος ακέραιος αριθμός, αφαιρούμε τρεις διακεκριμένους 3-κύκλους. Εάν  $k - 9 = 1$ , αφαιρούμε και ένα μονοπάτι μήκους δύο ξένο από τους κύκλους που έχουν ήδη αφαιρεθεί. Ενώ εάν  $k - 9 > 1$ , αφαιρούμε ένα  $C_{k-9}$  ξένο από τους κύκλους που έχουν ήδη αφαιρεθεί. Τέλος, σε κάθε υποπερίπτωση αφαιρούμε ένα μέγιστο ταίριασμα από κορυφές που δεν έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί.

**Λήμμα 3.19.** Το γράφημα  $P_t^k$  είναι μια  $t$ -εξέδρα.

*Απόδειξη.* Έχουμε ότι  $|V(P_t^k)| = t + 1$  και ακόμη ο ελάχιστος βαθμός του  $P_t^k$  είναι  $t - 2$ . Άρα υπάρχουν  $k$  το πλήθος κορυφές βαθμού  $t - 2$  και εξ'ορισμού ισχύει  $k \leq t - 2$ . Έστω  $A = \{v \in V(P_t^k) : \deg(v) = t - 2\}$  και  $B = V(P_t^k) \setminus A$ . Από τον τρόπο που κατασκευάσαμε τα  $P_t^k$ , έχουν τρεις σηματοδούρες και μέσω του Θεωρήματος 3.11, το γράφημα  $P_t^k$  είναι μια  $t$ -εξέδρα.  $\square$

Τέλος, θέλοντας να κατασκευάσουμε γραφήματα με ελάχιστο βαθμό  $t-1$  και ακμο-  
 συνεκτικότητα  $k$ , όπου  $(7 \leq k \leq t-2)$  χωρίς όμως εμβύδιση  $K_t$ , θα σχηματίσουμε  
 παραδείγματα γραφημάτων που θα τα καλούμε  $M_t^k$ , τα οποία βασίζονται στις πα-  
 ραπάνω αποβάθρες. Για κάθε  $t \geq 9$ , ορίζουμε ως  $M_t^k$  το γράφημα που δημιουργείται  
 συνδέοντας διαδοχικές  $n \geq 1$  αποβάθρες ισομορφικές με το  $K_{t-2}$  και προσθέτοντας  
 τους αντίγραφα της εξέδρας  $P_t^k$  ώστε να γίνουν πλήρεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι  
 τα γραφήματα  $M_t^k$  είναι  $k$ -συνεκτικά.

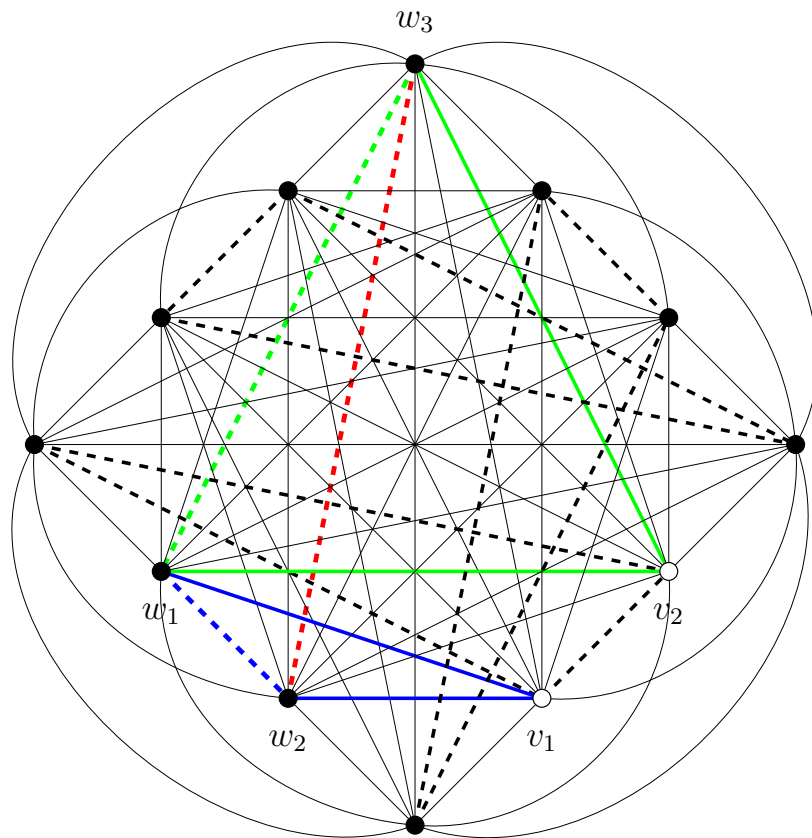
**Θεώρημα 3.20.** Το γράφημα  $M_t^k$  έχει ελάχιστο βαθμό  $t-1$  και δεν έχει εμβύδιση  
 $K_t$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη έπεται τετριμμένα από το Θεώρημα 3.9 και το παραπάνω  
 Λήμμα 3.19. □

### 3.2 Αντιπαράδειγμα $t = 10$ , Περίπτωσης $t \geq 10$

Στην προηγούμενη υποενότητα, είδαμε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε παραδείγματα που είναι  $(t - 2)$ -ακμο-συνεκτικά για τις τιμές  $t = 9$  και  $t \geq 11$ . Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε ένα αντιπαράδειγμα που καλύπτει τις τιμές  $t \geq 10$ . Έχοντας αποδείξει ότι το Θεώρημα 2.1 ισχύει για τις περιπτώσεις  $t \in \{5, 6, 7\}$  αλλά δεν ισχύει για  $t \in \{8, 9, 11\}$ , ας αναλύσουμε γιατί αποτυγχάνει όταν  $t \geq 10$ . Το αντιπαράδειγμα που προτάθηκε από τον Paul Seymour [9], [8], μαρτυρά την ύπαρξη ενός γραφήματος ελάχιστου βαθμού  $d(10) = 10 - 1 = 9$  που δεν περιέχει εμβύδιση  $K_{10}$ , δηλαδή έδειξε ότι  $d(10) \geq 10$ . Η τεχνική αυτή γενικεύεται και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι  $d(t) \geq t$  για κάθε  $t \geq 10$  διαψεύδοντας έτσι την εικασία για τις τιμές αυτές.

Ας θεωρήσουμε ως  $G$  το 9-κανονικό γράφημα που προέρχεται από την κλίκα  $K_{12}$  διαγράφοντας τις ακμές τεσσάρων διακεκριμένων τριγώνων (αναπαριστάνονται με διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα 3.5). Επειδή  $\Delta(K_{12}) = 11$  και κάθε κορυφή στο  $G$  γειτονεύει με ένα από τα τρίγωνα, το  $G$  έχει ελάχιστο βαθμό 9.



Σχήμα 3.5: Γράφημα με ελάχιστο βαθμό 9 που δεν περιέχει εμβύδιση  $K_{10}$

Υποθέτουμε (προς άτοπο) ότι υπάρχει μια εμβύθιση  $K_{10}$ . Συνεπώς, επειδή δύο κορυφές  $v_1, v_2 \in V(K_{12})$  δεν αποτελούν κορυφές διακλάδωσης της κλίμακας  $K_{10}$ , είτε θα ανήκουν σε ένα εκ των τεσσάρων τριγώνων είτε όχι.

Εάν οι  $v_1, v_2$  ανήκουν σε ένα τρίγωνο, διαλέγοντας ένα τυχαίο τρίγωνο από τα υπόλοιπα τρία παρατηρούμε ότι οι τρεις μη-γειτονικές κορυφές  $w_1, w_2, w_3$  ανήκουν στο  $K_{10}$  μέσω μονοπατιών χρησιμοποιώντας τις  $v_1, v_2$ . Έστω ότι η  $w_1$  δεσμεύει και τις δύο  $v_1, v_2$  για να συνδεθεί με τις  $w_2, w_3$ . Έπεται ότι οι  $w_2, w_3$  δε μπορούν να συνδεθούν επειδή οι αναγκαίες ακμές έχουν ήδη επιλεγεί από την  $w_1$ . Συνεπώς, καταλήγουμε σε αντίφαση.

Εάν οι  $v_1, v_2$  ανήκουν σε δύο διακεκριμένα τρίγωνα, διαλέγοντας τυχαία ένα από τα υπόλοιπα δύο παρατηρούμε, όμοια με πριν, ότι οι  $w_1, w_2, w_3$  ανήκουν στο  $V(K_{10})$  μέσω μονοπατιών των  $v_1, v_2$ . Έστω ότι η  $w_1$  δεσμεύει τις  $v_1, v_2$  για να συνδεθεί με τις  $w_2, w_3$ . Επομένως, οι κορυφές  $w_2, w_3$  δε μπορούν να συνδεθούν αφού οι απαραίτητες ακμές έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί από την  $w_1$ , καταλήγοντας έτσι σε άτοπο.

Συνεπώς, εύκολα συμπεραίνεται πως το  $G$  δεν περιέχει εμβύθιση  $K_{10}$ . Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να επεκταθεί και για μεγαλύτερους βαθμούς προσδένοντας κορυφές συνδεδεμένες με κάθε κορυφή.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

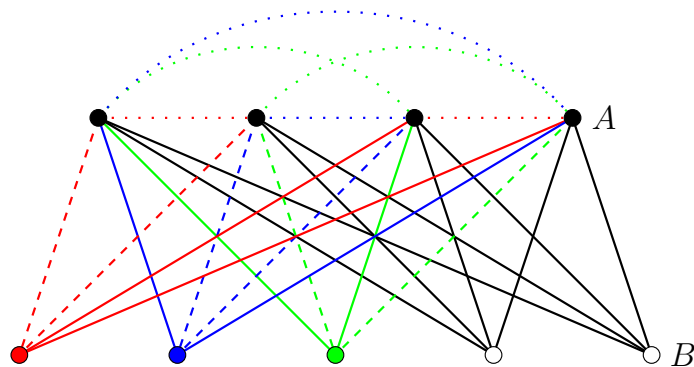
### ΕΛΑΧΙΣΤΟΣ ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΙ ΕΜΒΥΘΙΣΕΙΣ

#### 4.1 Ισχυρές εμβυθίσεις

Σε αυτό το σημείο έχουμε ήδη μελετήσει την εικασία βαθμού εμβύθισης όπου  $d(t) = t - 1$ . Η εικασία επαληθεύεται όταν  $t \leq 7$  αλλά δεν ισχύει για  $t \in \{8, 9, 11\}$  όπως επίσης αποτυγχάνει για  $t \geq 10$ . Το επόμενο ερώτημα μας είναι αν υπάρχει κάποιο άνω φράγμα για το  $d(t)$ . Στην πρώτη ενότητα θα αποδείξουμε ότι η τιμή  $200t$  αποτελεί ένα άνω φράγμα.

**Λήμμα 4.1.** Για κάθε  $a \leq b$ , το πλήρες διμερές γράφημα  $K_{a,b}$  περιέχει μια ισχυρή εμβύθιση  $K_a$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $K_{a,b}$  το πλήρες διμερές γράφημα και η διαμέριση του  $(A, B)$  με  $a = |A|$ ,  $b = |B|$ . Στη γενική περίπτωση, ένα γράφημα με  $a$  κορυφές χρωματίζεται ως προς τις κορυφές με  $a$  χρώματα και ως προς τις ακμές με  $a - 1$  χρώματα. Για να βρούμε την εμβύθιση  $K_a$  στο  $K_{a,b}$ , αρκεί να βρούμε τις ακμές που συνδέουν ανά δύο τις κορυφές του  $A$  (απεικονίζονται στο Σχήμα 4.1 με διακεκομμένες γραμμές με τελείες). Θα βρούμε μονοπάτια μέσω του  $B$  που θα παίζουν τον ρόλο αυτών των ακμών. Ειδικότερα, οποιαδήποτε διαμέριση των κορυφών μιας κλίμακας σε δισύνολα οδηγεί σε ταιριάσματα. Επειδή τα ταιριάσματα είναι  $a - 1$  [αν  $a$  άρτιος] ή  $a$  [αν  $a$  περιττός] τόσα θα είναι και τα χρώματα που θα χρειαστούμε. Χρωματίζουμε τις κορυφές του  $B$  έτσι ώστε από κάθε κορυφή να περνούν μονοπάτια ως ζεύγη ακμών (κανονικές γραμμές και διακεκομμένες γραμμές με παύλες) που αντικαθιστούν τις ζητούμενες ακμές. Ανυψώνοντας αυτά τα ζεύγη και προσδίδοντας κάθε φορά την αντίστοιχη ακμή προκύπτει η εμβύθιση  $K_a$ .  $\square$



Σχήμα 4.1:  $K_{a,b}$

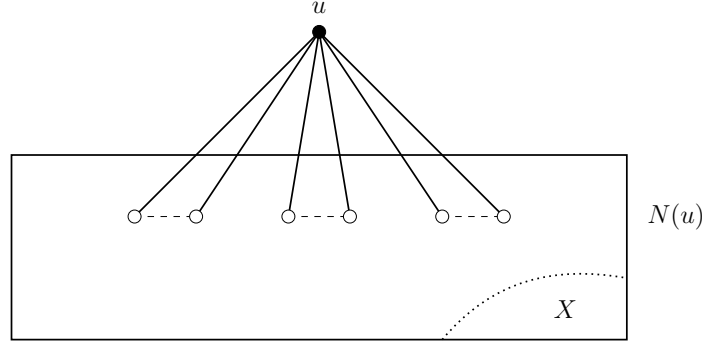
**Λήμμα 4.2.** Έστω  $G$  ένα απλό γράφημα (όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2) με  $n$  κορυφές που δεν έχει υπογράφημα ισομορφικό του  $K_q$ . Αν η κορυφή  $u \in V(G)$  έχει  $\deg(u) \leq d(G)$ , τότε το απλό γράφημα  $G'$  που δημιουργείται κάνοντας διάλυση της  $u$  θα έχει  $\bar{d}(G') \geq d(G) - \frac{q-2}{n-1}$ .

*Απόδειξη.* Ορίζουμε το γράφημα  $H$  να είναι το συμπλήρωμα του γραφήματος που παράγεται από τη  $N(u)$ ,  $H = \overline{G[N(u)]}$ . Διαλέγουμε ένα μεγιστικό ταίριασμα του  $H$ , το  $M$ . Ορίζουμε ως  $X \subseteq N(u)$  το σύνολο που δεν καλύπτεται από το  $M$ . Στην περίπτωση που το  $M$  είναι τέλει, θα ισχύει  $X = \emptyset$ . Έπειτα δημιουργούμε το απλό γράφημα  $G'$  από το  $G$  κάνοντας ανυψώσεις σε ζευγάρια ακμών γειτονικά με την  $u$  ώστε να προσδετούν καινούριες ακμές στο ταίριασμα  $M$  και διαγράφοντας τις ακμές που έχουν άκρα την  $u$  και κορυφές στο  $X$ . Παρατηρούμε ότι το  $X$  είναι ανεξάρτητο σύνολο στο  $H$  καθώς αν οποιεσδήποτε δύο κορυφές του συνδέονταν με ακμή θα σήμαινε ότι το  $M$  δεν είναι μεγιστικό, που είναι άτοπο. Άρα το  $X \subseteq N(u)$  μαζί με την  $u$  αποτελούν κλίκα στο  $G$ . Οπότε ισχύουν τα εξής:  $|X| \leq q - 2$  και

$$\begin{aligned}
 \bar{d}(G') &= \frac{1}{n-1} \sum_{u \in V(G) \setminus \{u\}} \deg_{G'}(u) \\
 &\geq \frac{1}{n-1} \sum_{u \in V(G) \setminus \{u\}} \deg_G(u) - \frac{q-2}{n-1} \\
 &\geq d(G) - \frac{q-2}{n-1}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

□





Σχήμα 4.2: Γράφημα  $G$

**Λήμμα 4.3.** Κάθε  $G$  απλό γράφημα με  $n$  κορυφές και  $m$  ακμές περιέχει μια ισχυρή εμβύδιση  $K_q$  όπου  $q = \left\lfloor \frac{m}{n \log \left( \frac{n^2}{m} \right)} + \frac{1}{3} \right\rfloor$ .

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε επανειλημμένα το Λήμμα 4.2 κάνοντας διάλυση σε κορυφές μέχρι οι κορυφές του γραφήματος να είναι  $q = \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil + 1$ . Αν κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων βρεθεί γράφημα που περιέχει μια εμβύδιση  $K_q$ , οδηγούμαστε σε άτοπο. Αλλιώς, έστω  $H$  το γράφημα στο οποίο έχουμε καταλήξει. Για το οποίο, θα ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}
\bar{d}(H) &\geq \frac{2m}{n} - \frac{q-2}{n-1} - \frac{q-2}{n-2} - \dots - \frac{q-2}{\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil + 1} \\
&\geq \frac{2m}{n} - (q-2) \int_{\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil}^{n-1} \frac{1}{x} dx \\
&\geq \frac{2m}{n} - (q-2) \left( \log(n-1) - \log\left(\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil\right) \right) \\
&\geq \frac{2m}{n} - (q-2) \log\left(\frac{n-1}{\frac{m}{n}}\right) \\
&\geq \frac{2m}{n} - (q-2) \log\left(\frac{n^2}{m}\right) \\
&\geq \frac{2m}{n} - \left( \left\lfloor \frac{m}{n \log\left(\frac{n^2}{m}\right)} + \frac{5}{3} \right\rfloor \right) \log\left(\frac{n^2}{m}\right) \\
&\geq \frac{2m}{n} - \left( \frac{m}{n} - \frac{5}{3} \log\left(\frac{n^2}{m}\right) \right) \\
&\geq \frac{2m}{n} - \frac{m}{n} + \frac{5}{3} \log\left(\frac{n^2}{m}\right) \\
&\geq \frac{m}{n} + \frac{5}{3} \log\left(\frac{n^2}{m}\right) \\
&\geq \frac{m}{n} + 1
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει λόγω της σχέσης  $n^2 \geq 2m$  επειδή το γράφημα  $G$  είναι απλό. Καταλήξαμε έτσι σε αντίφαση αφού το  $H$  έχει μόνο  $\lceil \frac{m}{n} \rceil + 1$  κορυφές, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη.  $\square$

**Θεώρημα 4.4.** [24] Ένα γράφημα  $G$  έχει  $k$  ακμο-διακεκριμένα παραγόμενα δέντρα αν και μόνο αν για κάθε διαμέριση  $P$  του  $V(G)$  ισχύει  $|E_P(G)| \geq k(|P| - 1)$ . Όπου  $E_P(G)$  είναι το σύνολο των ακμών του  $G$  που ενώνουν κορυφές που ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα της διαμέρισης  $P$ .

**Λήμμα 4.5.** Κάθε γράφημα ελαχίστου βαθμού  $2k$  περιέχει ένα υπογράφημα  $H$  που έχει  $k$  ακμο-διακεκριμένα παραγόμενα δέντρα.

*Απόδειξη.* Αν υπάρχει διαμέριση  $(X, Y)$  μεγέθους γνήσια μικρότερο από  $2k$  στο  $G$ , διαλέγουμε αυτή για την οποία το  $X$  είναι το μικρότερο δυνατό, διαφορετικά θέτουμε  $X = V(G)$ . Ορίζουμε ως  $H$  το υπογράφημα που παράγεται από το  $X$ . Ας υποθέσουμε ότι το  $H$  δεν έχει  $k$  ακμο-διακεκριμένα παραγόμενα δέντρα. Έπεται από το Θεώρημα 4.4 ότι υπάρχει μια διαμέριση του  $X$  σε  $t \geq 2$  τμήματα,  $\{X_1, \dots, X_t\}$ , έτσι ώστε το πλήθος των ακμών με άκρα σε διαφορετικά τμήματα της διαμέρισης να είναι γνήσια μικρότερο από  $k(|X| - 1) = k(t - 1)$ . Οπότε ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^t |\delta(X_i)| < 2k(t - 1) + |\delta(X)| \leq 2kt \quad (4.3)$$

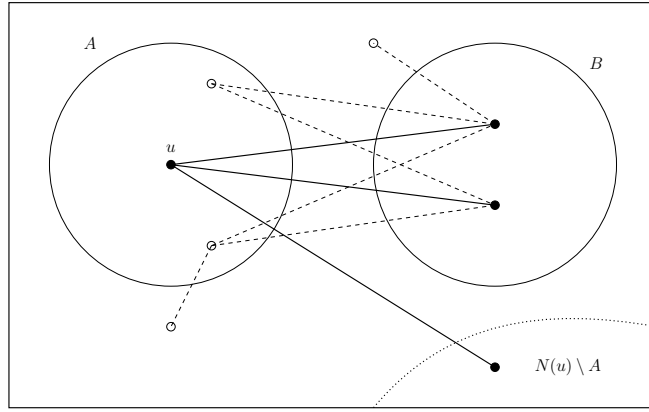
δηλαδή υπάρχει  $1 \leq i \leq t$  για το οποίο  $|\delta(X_i)| \leq 2k$ . Το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την επιλογή του  $X$ , να είναι το μικρότερο τέτοιο σύνολο, άρα οδηγηθήκαμε σε άτοπο, που σημαίνει ότι το  $H$  έχει  $k$  ακμο-διακεκριμένα παραγόμενα δέντρα.  $\square$

**Θεώρημα 4.6** (Gallai, Edmonds). Για κάθε γράφημα  $G$  χωρίς τέλει ταιρίασμα, υπάρχει ένα σύνολο  $X \subseteq V$  έτσι ώστε κάθε περιττής τάξης συνεκτική συνιστώσα του  $G \setminus X$  είναι υπο-ταιριαζόμενη και το πλήθος των περιττών συνιστωσών είναι μεγαλύτερο από  $|X|$ .

**Θεώρημα 4.7.** Έστω  $G$  ένα Οϊλεριανό γράφημα (όπως αποτυπώνεται στο Σχήμα 4.3) με ελάχιστο βαθμό τουλάχιστον  $100t$ ,  $s \geq 0$  και  $A, B \subseteq V(G)$  με πληθαιδίθμους  $a = |A|$ ,  $b = |B|$  αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $A \cap B = \emptyset$  και κάθε κορυφή στο  $A$  γειτονεύει με κάθε κορυφή του  $B$ .
- Δεν υπάρχουν θηλιές έξω από το σύνολο  $A$  και το πολύ μία παράλληλη κλάση δεν έχει και τα δύο άκρα της στο  $A$ . Αν υπάρχει τέτοια παράλληλη κλάση, είναι μεγέθους δύο, και το άκρο της έξω από το  $A$  έχει το πολύ 50τ το πλήθος γείτονες στο  $B$ .
- Υπάρχουν  $s$  το πλήθος ακμο-διακεκριμένα ταιριάσματα στο  $B$ , το καθένα μεγέθους τουλάχιστον  $b - 53t$ .
- $2a + b + 2s \geq 100t$ .
- $a > 0$ ,  $72t \leq b \leq 100t$ .

Τότε το γράφημα  $G$  περιέχει το  $K_t$  ως ισχυρή εμβύδιση.



Σχήμα 4.3: Οϊλεριανό γράφημα  $G$

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε (προς άτοπο) ότι το θεώρημα δεν ισχύει και θεωρούμε το μικρότερο ως προς το  $|V(G)|$  αντιπαράδειγμα, άρα και με το μικρότερο δυνατό  $b$ . Η περίπτωση που  $t = 1$  όπου και ψάχνουμε μια εμβύδιση  $K_1$  είναι τετριμμένη άρα υποθέτουμε ότι  $t \geq 2$ .

**Ορισμός 4.8** (Κλώνος). Έστω μια ακμή  $uw$  ενός γραφήματος. Ως κλώνος της κορυφής  $u$  ορίζεται μια νέα κορυφή  $v$  η οποία έχει τους ίδιους γείτονες που είχε η  $u$  αλλά δεν συνδέεται με την  $w$ .

Αν υπάρχει παράλληλη κλάση (με όχι και τα δύο άκρα της στο  $A$ ), έστω  $u$  το άκρο του  $A$  και  $u'$  το άλλο. Διαφορετικά, θέτουμε  $u$  μια τυχαία κορυφή στο  $A$ . Ας θεωρήσουμε τώρα το συμπλήρωμα του γραφήματος που ενάγεται από το σύνολο  $N(u) \setminus A$ , το οποίο ας θέσουμε ως  $H$ . Αν υπάρχει η παράλληλη κλάση  $uu'$  ισχύει ότι  $u' \in V(H)$  και τροποποιούμε το  $H$  προσδέτοντας τον κλώνο  $u'$  της κορυφής  $u'$  ο οποίος δεν γειτονεύει με την  $u$ . Η παρουσίαση της απόδειξης στηρίζεται σε τέσσερις ισχυρισμούς.

**Ισχυρισμός 4.9.** Σε κάθε  $B' \subseteq B$  υπάρχουν  $s$  ακμο-διακεκριμένα ταιριάσματα μεγέθους τουλάχιστον  $|B'| - 53t$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Τα  $s$  ακμο-διακεκριμένα ταιριάσματα του  $B$  είναι ακμο-διακεκριμένα ταιριάσματα και του  $B'$ . Η απόδειξη είναι τετριμμένη από την άποψη ότι η αφαίρεση  $k = |B| - |B'|$  κορυφών μπορεί να προκαλέσει μείωση του μεγέθους του ταιριάσματος κατά το πολύ  $k$  ακμές.  $\triangle$

**Ισχυρισμός 4.10.**  $b \geq 74t$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Δείχνουμε πρώτα ότι  $a < t$ . Αν ίσχυε  $a \geq t$  τότε από το Λήμμα 4.1 έπεται ότι υπάρχει εμβύδιση  $K_t$  στο  $G$ . Δείχνουμε έπειτα ότι  $s < 12t$ . Ομοίως, αν ίσχυε  $s \geq 12t$  τότε για το γράφημα  $G'$  (υπογράφημα του  $G$  που ενάγεται από  $72t$  κορυφές του  $B$ ) θα υπήρχαν  $12t \leq s$  ταιριάσματα μεγέθους τουλάχιστον  $72t - 53t = 19t$  (λόγω του Ισχυρισμού 4.9), άρα τουλάχιστον  $19t \times 12t = 228t^2$  ακμές. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3 για το  $G'$ , βρίσκουμε εμβύδιση  $K_t$ , που μας οδηγεί σε άτοπο. Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα με την 4<sup>η</sup> ιδιότητα του 4.7, έχουμε:

$$b \geq 100t - 2a - 2s > 100t - 2t - 24t = 74t.$$

△

**Ισχυρισμός 4.11.** Το  $H$  δεν έχει τέλειο ταίριασμα.

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Ας υποθέσουμε (προς άτοπο) ότι ο παραπάνω ισχυρισμός δεν ισχύει. Θα υπάρχει τότε ένα τέλειο ταίριασμα  $M$  του  $H$  ώστε το  $M$  να έχει το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος ακμών που έχουν και τα δύο άκρα τους στο  $B$ . Υποθέτουμε ακόμη ότι υπάρχει ένα υποσύνολο  $M' = \{u_1w_1, u_2w_2, \dots, u_{6t-1}w_{6t-1}\}$  του  $M$  τέτοιο ώστε καμία ακμή του  $M'$  να μη γειτονεύει με τον κλώνο (αν φυσικά αυτός υπάρχει) και έτσι  $u_i \in B$  ενώ  $w_i \notin B$  για  $1 \leq i \leq 6t-1$ . Αν υπήρχαν τιμές  $1 \leq i < j \leq 6t-1$  για τις οποίες να ισχύει  $u_iu_j, w_iw_j \in E(H)$  τότε ανταλλάσσοντας τις ακμές  $u_iu_j, w_iw_j$  με τις  $u_iw_i, u_jw_j$  θα βελτιώναμε το ταίριασμα  $M$ , άτοπο άρα τουλάχιστον μία από αυτές τις ακμές δεν είναι στο  $H$ . Όμως τότε, στο αρχικό γράφημα  $G$ , το υπογράφημα που ενάγεται είτε από το σύνολο  $\{u_1, u_2, \dots, u_{6t-1}\}$  ή από το  $\{w_1, w_2, \dots, w_{6t-1}\}$  έχει τουλάχιστον  $\frac{1}{2} \binom{6t-1}{2}$  ακμές. Έπειτα, εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3 σε αυτό το υπογράφημα, παίρνουμε μια εμβύδιση  $K_t$  καταλήγοντας έτσι σε άτοπο.

Για να επιβεβαιώσουμε την εφαρμογή του λήμματος αρκεί να παρατηρήσουμε ότι όταν  $n = 6t-1$  και  $m = \frac{1}{4}(6t-1)(6t-2)$  ισχύει  $\frac{m}{n \log \frac{n^2}{m}} + \frac{1}{3} \geq t$  που ισοδυναμεί με τη σχέση  $\log \left(4 + \frac{4}{6t-2}\right) \leq \frac{3}{2}$  που ισχύει για κάθε  $t \geq 2$ . Άρα δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο  $M'$ . Παρατηρούμε ότι το ταίριασμα  $M$  του  $H$  είναι ένα σύνολο μη-ακμών στο  $G$  (θεωρούμε ως μη-ακμές στο  $G$  τις ακμές στο  $M$  με άκρο την κορυφή  $u''$ ). Διαχωρίζουμε την κορυφή  $u$  ώστε οι ακμές μεταξύ της  $u$  και του συνόλου  $V \setminus A$  ανυψωμένες να δημιουργούν το  $M$  και στη συνέχεια ανυψώνουμε τυχαία τις υπόλοιπες ακμές μεταξύ της  $u$  και του  $A \setminus \{u\}$ , και αυτό μας το επιτρέπει το γεγονός ότι η κορυφή  $u$  έχει άρτιο βαθμό. Καλούμε το γράφημα που προκύπτει  $G'$ . Στην περίπτωση που  $A = \{u\}$ , έχουμε ότι το  $G'$  είναι απλό γράφημα και διαλέγοντας ως  $A' = \{w\}$  όπου  $w \in V(G')$ ,  $B'$  ένα υποσύνολο  $100t$  γειτόνων της  $w$  και  $s' = 0$ , παίρνουμε ένα μικρότερο αντιπαράδειγμα, οπότε συμπεραίνουμε ότι  $A \neq \{u\}$ .

Ας θέσουμε τώρα  $A' = A \setminus \{u\}$ ,  $B' = B$  και  $s' = s + 1$ . Ισχυριζόμαστε ότι τα  $G', A', B', s'$  αποτελούν μικρότερο αντιπαράδειγμα. Η  $1^{\eta}$  ιδιότητα ικανοποιείται αφού  $A' \cap B' = (A \setminus \{u\}) \cap B = \emptyset$ . Η  $2^{\eta}$  ιδιότητα ισχύει τετριμμένα. Οι δύο τελευταίες ιδιότητες ικανοποιούνται επίσης και μένει να ασχοληθούμε με την πιο ενδιαφέρουσα απόδειξη της  $3^{\eta}$  ιδιότητας. Έστω  $M^*$  το υποσύνολο των ακμών του  $M$  οι οποίες δεν είναι γειτονικές με τον κλώνο στο  $H$  και έχουν και τα δύο άκρα στο  $B$ . Οπότε το  $M^*$  αποτελεί ένα ταίριασμα μη-ακμών του  $G$  που καλύπτει όλες τις κορυφές στο  $B$  εκτός από μια κορυφή που συνδέεται με τον κλώνο μέσω του  $M$  και ένα σύνολο το πολύ  $6t-2$  κορυφών που συνδέονται με το  $M$  με κορυφές εκτός του  $B$ . Έτσι το  $M^*$  έχει πλήθος τουλάχιστον  $\frac{1}{2}(b - (6t-2) - 1) > \frac{1}{2}b - 3t \geq b - 53t$ , επειδή  $b \leq 100t$ , ολοκληρώνοντας έτσι και την απόδειξη της  $3^{\eta}$  ιδιότητας. △

**Ισχυρισμός 4.12.** Το  $H$  δεν είναι υπο-ταιριαζόμενο.

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι δεν ισχύει ο ισχυρισμός. Αν κάθε κορυφή στο  $B$  εκτός από πιθανόν την  $u$  έχει πάνω από  $50t$  γείτονες στο  $B$ , τότε το υπογράφημα που ενάγεται από το  $B$  έχει περισσότερες από  $\frac{1}{2}(b-1)50t \geq \frac{1}{2}(74t-1)50t \geq 1850t^2 - 25t \geq 1800t^2$  ακμές και το πολύ  $100t$  κορυφές οπότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3 αποκτούμε μια ισχυρή εμβύθιση  $K_q$  όπου  $q = \left\lfloor \frac{1800t^2}{100t \log \left( \frac{10000t^2}{1800t^2} \right)} + \frac{1}{3} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{1800t^2}{100t \log 4} + \frac{1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1800t^2}{200t} + \frac{1}{3} \right\rfloor \geq 9t + \frac{1}{3}$  δηλαδή μια ισχυρή εμβύθιση  $K_t$  καταλήγοντας σε άτοπο.

Αρα υπάρχει μια κορυφή  $w \in B \setminus \{u\}$  η οποία έχει το πολύ  $50t$  γείτονες στο  $B$ . Αφού το γράφημα  $H$  είναι υπο-ταιριαζόμενο, το γράφημα  $H \setminus w$  έχει τέλειο ταίριασμα. Ας διαλέξουμε ένα ταίριασμα  $M$  το οποίο περιλαμβάνει το μεγαλύτερο αριθμό ακμών που έχουν και τα δύο άκρα τους στο  $B$ . Εργαζόμενοι όπως και στον Ισχυρισμό 4.11, διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει υποσύνολο  $M'$  αποτελούμενο από  $6t-1$  ακμές μη γειτονικές με τον κλώνο που συνδέουν κορυφές του  $B$  με κορυφές εκτός του  $B$ .

Σχεπτόμενοι όπως και στην προηγούμενη απόδειξη του Ισχυρισμού 4.11, φανταζόμαστε το  $M$  ως ένα σύνολο από μη-ακμές στο  $G$  και διαχωρίζουμε τις ακμές μεταξύ της  $u$  και του συνόλου  $V(G) \setminus (A \cup \{w\})$  ώστε να σχηματιστεί το  $M$  και έπειτα διαχωρίζουμε τυχαία τις υπόλοιπες ακμές μεταξύ της  $u$  και του συνόλου  $\{w\} \cup (A \setminus \{u\})$ . Καλούμε το νέο γράφημα που προκύπτει  $G'$ . Επειδή η κορυφή  $u$  έχει άρτιο βαθμό, η ακμή που ενώνει τις  $u, w$  θα ανυψωθεί μαζί με μια άλλη ακμή μεταξύ της  $u$  και μιας κορυφής του συνόλου  $A \setminus \{u\}$ . Πιο συγκεκριμένα το σύνολο  $A' = A \setminus \{u\}$  παραμένει μη-κενό. Θέτουμε  $B' = B$  και  $s' = s + 1$  και ισχυριζόμαστε ότι το  $G'$  με τα  $A', B', s'$  σχηματίζουν μικρότερο αντιπαράδειγμα.

Σε αυτό το σημείο, έχει δημιουργηθεί μια παράλληλη ακμή μεταξύ των  $A'$  και  $B'$  (δηλαδή η καινούρια ακμή που γειτονεύει με την  $w$ ) αλλά έχουμε ταυτόχρονα απαλείψει τυχόν παράλληλες ακμές οπότε υπάρχει μόνο η καινούρια και έτσι συνεχίζει να ικανοποιείται η  $2^n$  ιδιότητα. Η  $1^n$  ιδιότητα ικανοποιείται αφού  $A' \cap B' = (A \setminus \{u\}) \cap B = \emptyset$ . Οι δύο τελευταίες ιδιότητες ικανοποιούνται επίσης και μένει να ασχοληθούμε με την πιο ενδιαφέρουσα απόδειξη της  $3^{n^s}$  ιδιότητας.

Παρόμοια με πριν, θεωρούμε  $M^*$  το υποσύνολο των ακμών του  $M$  οι οποίες δεν γειτονεύουν με τον κλώνο στο  $H$  και έχουν και τα δύο άκρα τους στο  $B$ . Το  $M^*$  είναι ταίριασμα μη-ακμών στο  $G$  που καλύπτει όλες τις κορυφές στο  $B$  εκτός από ένα σύνολο το πολύ  $6t-2$  κορυφών που ταιριάζονται μέσω του  $M$  με κορυφές εκτός του  $B$  εκτός από την κορυφή  $w$  και πιθανόν μια κορυφή που συνδέεται με τον κλώνο στο  $M$ . Έπεται ότι το  $M^*$  έχει μέγεθος  $\frac{1}{2}(b-6t) \geq b-53t$  ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη και αυτής της ιδιότητας. Καταλήγουμε έτσι σε ένα μικρότερο αντιπαράδειγμα  $G'$ , που οδηγεί σε άτοπο, οπότε συμπεραίνουμε ότι το  $H$  δεν είναι υπο-ταιριαζόμενο.  $\triangle$

Έχοντας αποδείξει τους ισχυρισμούς, συνεχίζουμε την ροή της απόδειξης. Με βάση τον Ισχυρισμό 4.11 το σύνολο  $H$  δεν έχει τέλειο ταίριασμα και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.6 στο  $H$ , και να πάρουμε έτσι ένα σύνολο  $X$  ώστε το πλήθος των περιττών συνιστωσών είναι μεγαλύτερο από το  $|X|$ . Άρα θα ισχύει  $|X| < \frac{|H|}{2}$  και  $|H \setminus X| > \frac{|H|}{2} \geq \frac{b}{2} \geq 37t$ .

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει μια μοναδική συνιστώσα  $K$  του συνόλου  $H \setminus X$  που περιέχει όλες εκτός από το πολύ  $t$  κορυφές του συνόλου  $H \setminus X$ . Θεωρούμε ουσιαστικά μια όσο πιο ισορροπημένη διαμέριση γίνεται των συνιστωσών του  $H \setminus X$  (ισορροπημένη ως προς το πλήθος των κορυφών σε κάθε μέρος). Αν κάθε κομμάτι έχει τουλάχιστον  $t + 1$  κορυφές, αφαιρώντας τον πιθανό κλώνο συνεχίζουμε να έχουμε διαμέριση όπου τα κομμάτια της έχουν περισσότερες από  $t$  το πλήθος κορυφές. Συνεπώς, στο αρχικό μας γράφημα  $G$  υπάρχει το  $K_{t,t}$  και μέσω του Λήμματος 4.1 υπάρχει ισχυρή εμβύδιση  $K_t$  καταλήγοντας σε άτοπο.

Οπότε, δείξαμε ότι από τη μια μεριά της διαμέρισης υπάρχουν το πολύ  $t$  κορυφές και από την άλλη υπάρχουν παραπάνω από  $2t$  (ουσιαστικά υπάρχουν πάνω από  $36t$ ). Επειδή η διαμέριση είναι όσο γίνεται πιο ισορροπημένη, το μεγαλύτερο σύνολο θα έχει μόνο μία συνιστώσα. Επειδή η  $K$  περιέχει όλες εκτός από το πολύ  $t$  κορυφές του  $H \setminus X$ , θα ισχύει ότι το πλήθος των περιττών συνιστωσών είναι τουλάχιστον  $t + 1$  και γνήσια μικρότερο από  $|X|$ . Άρα η  $K$  περιέχει όλες εκτός από  $2t$  το πλήθος κορυφές του  $H$ .

Συνεπάγεται ότι το πλήθος των περιττών συνιστωσών είναι τουλάχιστον δύο. Ορίζουμε  $Y$  να είναι η ένωση των συνόλων κορυφών όλων των συνιστωσών του  $H \setminus X$  εκτός της  $K$ . Παρατηρούμε ότι στο αρχικό γράφημα  $G$  κάθε κορυφή στο  $Y$  είναι γειτονική με κάθε κορυφή του  $V(K)$  οπότε κάθε κορυφή στο  $Y$  γειτονεύει με όλες εκτός από το πολύ  $2t$  κορυφές στο  $B$ . Από την 2<sup>η</sup> ιδιότητα έπεται ότι αν έχουμε κλώνο, τότε αυτή η κορυφή δεν ανήκει στο  $Y$ . Άρα αν υπάρχει κλώνος ανήκει στο  $X$  και ορίζουμε ως  $X'$  το υποσύνολο του  $X$  που προκύπτει αφαιρώντας τον κλώνο. Διαφορετικά θέτουμε  $X' = X$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $|X'| + |Y| \leq 2t$ .
- $|Y| \geq |X'|$ .
- Κάθε κορυφή στο  $Y$  είναι γειτονική στο  $G$  με κάθε κορυφή στο  $B \setminus (X' \cup Y)$ .

Τέλος, θέτουμε  $A'$ ,  $B'$ ,  $s'$  να είναι τα εξής:  $A' = A \cup Y$ ,  $B' = B \setminus (X' \cup Y)$  και  $s' = s$ . Το γράφημα  $G$  με τα  $A'$ ,  $B'$  και  $s'$  αποτελεί μικρότερο αντιπαράδειγμα, καταλήγοντας σε άτοπο και ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη.  $\square$

**Λήμμα 4.13.** Κάθε  $G$  απλό γράφημα ελαχίστου βαθμού  $4k$  περιέχει ένα Οϊλεριανό υπογράφημα ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $2k$ .

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.5 για το γράφημα  $G$ , διαλέγουμε ένα υπογράφημα  $H$  που περιέχει  $2k$  ακμο-διακεκριμένα παραγόμενα δέντρα  $T_1, T_2, \dots, T_{2k}$ . Για κάθε ακμή  $e \in E(H) \setminus E(T_1)$  ορίζουμε ως  $C_e$  τον κύκλο που δημιουργείται με την προσθήκη της  $e$  στο  $T_1$  και  $S = \bigtriangleup_{e \in E(H) \setminus E(T_1)} C_e$  τη συμμετρική διαφορά αυτών των κύκλων. Έπειτα θεωρούμε το υπογράφημα  $H'$  με σύνολο ακμών το  $S = E(H')$ . Ισχύει ότι η συμμετρική διαφορά Οϊλεριανών γραφημάτων είναι πάλι Οϊλεριανό γράφημα και αφού ο κύκλος αποτελεί Οϊλεριανό γράφημα το  $H'$  είναι Οϊλεριανό. Ακόμη ισχύει ότι  $\bigcup_{j=2}^{2k} E(T_j) \subseteq E(H) \setminus E(T_1)$  και παρατηρούμε ότι κάθε δέντρο  $T_j$  συνεισφέρει τουλάχιστον κατά 1 στο βαθμό κάθε κορυφής. Άρα το  $H'$  έχει ελάχιστο βαθμό  $\delta(H') \geq 2k - 1$ . Όμως αφού κάθε βαθμός είναι άρτιος αριθμός και το  $2k - 1$  είναι περιττός, συμπεραίνουμε ότι  $\delta(H') \geq 2k$ . Συνοψίζοντας βρήκαμε υπογράφημα  $H'$  Οϊλεριανό με ελάχιστο βαθμό τουλάχιστον  $2k$ , ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη.  $\square$

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε το σημαντικότερο θεώρημα της ενότητας αυτής, το οποίο δείχνει ότι η τιμή  $200t$  αποτελεί άνω φράγμα της συνάρτησης  $d(t)$ .

**Θεώρημα 4.14.** Κάθε απλό γράφημα ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $200t$  περιέχει μια ισχυρή εμβύδιση  $K_t$ .

*Απόδειξη.* Έχοντας αποδείξει τα παραπάνω λήμματα, ξεκινάμε να τα ενώνουμε ώστε να συναρμολογήσουν την απόδειξη του θεωρήματος.

Έστω  $G$  απλό γράφημα ελαχίστου βαθμού  $200t$ . Έπεται από το Λήμμα 4.13 ότι το  $G$  περιέχει ένα Οϊλεριανό υπογράφημα  $G'$  ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $100t$ . Ας διαλέξουμε μια κορυφή  $u \in V(G')$  και έστω  $A = \{u\}$ ,  $B$  ένα σύνολο  $100t$  γειτόνων της  $u$  και  $s = 0$ . Ας επαληθεύσουμε ότι:

- $A \cap B = \emptyset$  και κάθε κορυφή στο  $A$  γειτονεύει με κάθε κορυφή του  $B$ .
- Δεν υπάρχουν θηλιές έξω από το σύνολο  $A$ , αν υπήρχαν θηλιές στο  $G'$ , θα υπήρχαν και στο  $G$  που είναι απλό, καταλήγοντας σε αντίφαση. Ακόμη, για τον ίδιο λόγο, δεν υπάρχουν παράλληλες κλάσεις.
- Ισχύει τετριμμένα ότι υπάρχουν  $s$  το πλήθος ακμο-διακεκριμένα ταιριάσματα στο  $B$ , το καθένα μεγέθους  $\geq b - 53t$ .
- $2a + b + 2s = 2 + 100t + 2s = 100t + 2(s + 1) > 100t$ .
- $a = 1 > 0$ ,  $b = 100t$ .

Έτσι, από το Θεώρημα 4.7, βρίσκουμε μια ισχυρή εμβύδιση  $K_t$  στο  $G$  και ολοκληρώνεται η απόδειξη.  $\square$

## 4.2 Ασθενείς εμβυδίσεις

Έχοντας αναλύσει πως συσχετίζεται ο ελάχιστος βαθμός ενός γραφήματος με την ύπαρξη ισχυρής εμβυδίσης, ας αναρωτηθούμε τώρα πως συνδέεται με την παρουσία ασθενούς εμβυδίσης. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την απόδειξη ενός θεωρήματος, το οποίο βελτιώνει το άνω φράγμα στην τιμή  $7t+7$ . Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε έχει δοθεί από τους Gauthier, Le και Wollan [17]. Πριν την απόδειξη του βασικού θεωρήματος αυτής της ενότητας θα ασχοληθούμε με τα επιμέρους λημμάτα που το πλαισιώνουν.

**Ορισμός 4.15.** Έστω  $X \subseteq V(G)$ , ορίζουμε  $f_G(u|X)$  το πλήθος των μη-γειτονικών κορυφών της  $u$ .

**Λήμμα 4.16.** Έστω γράφημα  $G = (V, E)$  και  $M$  υποσύνολο του συνόλου κορυφών του  $V$ ,  $|M| = t$ . Αν  $\sum_{u \in M} f_G(u) \leq \left( n - t - \max_{u \in M} f_G(u) \right) t$ , τότε το  $G$  περιέχει μια εμβυδίση  $K_t$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $b = \max_{v \in M} f_G(v)$ . Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν ξεχωριστές κορυφές  $v, v' \in M$  και  $w \in \overline{M}$  (όπου  $\overline{M}$  το συμπλήρωμα του  $M$ ) τέτοιες ώστε  $vv' \notin E(G)$  και  $vw, wv' \in E(G)$ . Ανυψώνοντας το μονοπάτι  $vvwv'$ , αποκτούμε την ακμή  $vv'$  ενώ τα  $f_G(v)$  και  $f_G(v')$  παραμένουν αμετάβλητα, και έτσι η παραπάνω σχέση εξακολουθεί να ισχύει για το νέο γράφημα. Κάνοντας επανειλημμένα ανυψώσεις σε τέτοια μονοπάτια, δημιουργούνται νέα γραφήματα που ικανοποιούν την σχέση στην υπόθεση του λήμματος και σε κάθε εκτέλεση της διαδικασίας μειώνονται οι ακμές. Επομένως, η διαδικασία τερματίζει και επιστρέφει ένα γράφημα  $G_1 = (V, E_1)$  που ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$\sum_{u \in M} f_{G_1}(u) \leq (n - t - b)t, \quad (4.4)$$

και δεν υπάρχουν  $v, v' \in M$  και  $w \in \overline{M}$  έτσι ώστε  $vv' \notin E_1$  και  $vw, wv' \in E_1$ . Για λόγους συντομίας, στην υπόλοιπη απόδειξη, θα γράφουμε  $f$  αντί για  $f_{G_1}$ . Έστω  $r$  το πλήθος των μη-ακμών του  $G_1$  με δύο άκρα στο  $M$ , και έστω  $X$  το σύνολο των άκρων τέτοιων μη-ακμών. Εάν  $r = 0$ , τότε το  $G_1[M]$  είναι αντίγραφο του  $K_t$ , αποδεικνύοντας έτσι το λήμμα. Ως εκ τούτου, ας υποθέσουμε ότι  $r \geq 1$ .

Με βάση τα παραπάνω, ισχύει ότι για κάθε  $v \in X$ , υπάρχει  $v' \in M$  τέτοιο ώστε  $vv' \notin E_1$ . Από τη Σχέση 4.2 προκύπτει  $f(v|\overline{M}) + f(v'|\overline{M}) \geq |\overline{M}| = n - t$ . Διαφορετικά, υπάρχει  $w \in \overline{M}$  τέτοιο ώστε  $vw, wv' \in E_1$ . Επομένως, ισχύει

$$n - t \leq f(v|\overline{M}) + f(v'|\overline{M}) \leq f(v|\overline{M}) + f(v') \leq f(v|\overline{M}) + b,$$

και έτσι  $f(v|\overline{M}) \geq n - t - b$  για κάθε  $v \in X$ . Οπότε

$$\sum_{v \in X} f(v) = \sum_{v \in X} f(v|M) + \sum_{v \in X} f(v|\overline{M}) \geq (n - t - b)|X| + 2r.$$



Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε μια εμβύδιση  $K_t$  στο  $G_1$  ως εξής: Για κάθε μη-γειτονικό ζεύγος κορυφών  $v, v' \in X$ , θα αποκτούμε την ακμή  $vv'$  ανυψώνοντας το μονοπάτι  $vwuw'v'$  για κάποια  $u \in Y = M \setminus X$  και  $w, w' \in \overline{M}$ . Ορίζουμε:

$$h(u) = \max \left( 0, \lfloor \frac{n-t-b-f(u)+1}{2} \rfloor \right).$$

Ισχύει ότι  $2h(u) \geq n-t-b-f(u)$ . Άρα

$$2 \sum_{u \in Y} h(u) \geq (n-t-b)|Y| - \sum_{u \in Y} f(u).$$

Στην περίπτωση που το  $Y = \emptyset$ , κάθε άθροισμα είναι μηδέν. Θα δείξουμε αργότερα ότι  $Y \neq \emptyset$ . Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις, προκύπτει:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{u \in Y} h(u) - 2r &\geq \left( (n-t-b)|Y| - \sum_{u \in Y} f(u) \right) + \left( (n-t-b)|X| - \sum_{u \in X} f(u) \right) \\ &\geq (n-t-b)(|X| + |Y|) - \sum_{u \in M} f(u) \\ &\geq (n-t-b)t - (n-b-t)t = 0. \end{aligned}$$

Οπότε,  $\sum_{u \in Y} h(u) \geq r$  και καθώς  $r \geq 1$ , έπεται ότι  $Y \neq \emptyset$ . Επιλέγουμε τυχαία δύο μη-γειτονικές κορυφές  $v, v' \in M$  (προφανώς  $v, v' \in X$ ) και μια κορυφή  $u \in Y$  έτσι ώστε  $h(u) \geq 1$ . Μια τέτοια κορυφή υπάρχει επειδή  $\sum_{u \in Y} h(u) \geq r \geq 1$ . Ισχύουν τα εξής

$$f(u|\overline{M}) \leq f(u) \leq n-t-b+1-2h(u) \leq n-t-b-1.$$

Αφού  $f(v) \leq b$ , έχουμε

$$f(u|\overline{M}) + f(v|\overline{M}) \leq (n-t-b-1) + f(v) \leq n-t-1 < |\overline{M}|,$$

έτσι οι  $u$  και  $v$  έχουν έναν κοινό γείτονα  $w \in \overline{M}$ . Ομοίως οι  $u$  και  $v'$  έχουν κοινό γείτονα  $w' \in \overline{M}$ . Εάν ίσχυε  $w = w'$ , τότε  $vw, wv' \in E_1$ , άτοπο με βάση τη Σχέση 4.2.

Ανυψώνοντας το μονοπάτι  $vwuw'v'$ , δημιουργείται η ακμή  $vv'$  και τα  $f(v)$  και  $f(v')$  παραμένουν αμετάβλητα ενώ το  $f(u)$  αυξάνεται κατά δύο, δηλαδή το  $h(u)$  μειώνεται κατά ένα. Έτσι, το άθροισμα  $\sum_{u \in Y} h(u)$  μειώνεται κατά 1. Ωστόσο, ο αριθμός των ακμών που λείπουν στο  $G_1[M]$  μειώνεται επίσης κατά ένα, οπότε το  $\sum_{u \in Y} h(u)$  είναι τουλάχιστον ο αριθμός των ακμών που λείπουν στο  $G_1[M]$ . Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αυτή μέχρι να συνδέσουμε όλα τα ζεύγη μη-γειτονικών κορυφών στο  $M$ , αποκτώντας έτσι ένα πλήρες γράφημα στο  $M$ . Οπότε, το  $G_1$  περιέχει μια εμβύδιση  $K_t$  και κατά συνέπεια, το  $G$  περιέχει το  $K_t$  ως εμβύδιση, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του λήμματος.  $\square$

**Λήμμα 4.17.** [13] Κάθε πλήρες πολυμερές γράφημα ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $t$  περιέχει μια εμβύδιση  $K_t$ .

**Λήμμα 4.18.** [13] Έστω  $H$  γράφημα το οποίο δεν έχει υποσύνολο ένα πλήρες πολυμερές γράφημα ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $t$ . Αν το συμπλήρωμα του  $\overline{H}$  δεν έχει τέλει ταιριασμα ούτε είναι υπο-ταιριαζόμενο, τότε υπάρχουν ξένα σύνολα  $W, L$  του  $V(H)$  ώστε:

- $|W| \leq t - 1$  και  $|L| \geq |V(H)| - 2|W|$
- $\forall u \in W \ f_H(u) \leq |W|$
- η  $uv \in E(H)$  για κάθε  $u \in W$  και  $v \in L$ .

**Ορισμός 4.19.** Δωσμένου ενός πολυγραφήματος  $G$ , λέμε ότι μια κορυφή  $v$  του  $G$  μπορεί να καλο-διαλυθεί αν με τη διάλυση της δεν δημιουργείται εκ νέου θηλιά ή πολλαπλή ακμή. Δηλαδή αν υπάρχει ζευγάρι των ακμών  $E_G(v)$  τέτοιο ώστε:

- Για κάθε  $\{vu_1, vu_2\}$  ζευγάρι, ισχύει  $u_1 \neq u_2$  και  $u_1u_2 \notin E(G)$
- Για κάθε  $\{vu_1, vu_2\}, \{vu'_1, vu'_2\}$  δυάδα ζευγαρωμάτων, ισχύει  $\{u_1, u_2\} \neq \{u'_1, u'_2\}$ .

**Ορισμός 4.20.** Ορίζουμε ότι μια κορυφή  $v$  μπορεί να σχεδόν-καλο-διαλυθεί αν για κάθε  $e \in E_G(v)$ , η  $v$  μπορεί να καλο-διαλυθεί αφού διαγραφεί η  $e$ .

**Παρατήρηση 4.21.** Στα απλά γραφήματα, οι έννοιες καλο-διαλυθεί και τέλει ταιριασμα είναι ισοδύναμες. Πιο συγκεκριμένα, αν μια κορυφή  $v$  μπορεί να καλο-διαλυθεί τότε το  $\overline{G[N(v)]}$  έχει τέλει ταιριασμα. Ομοίως αν μια κορυφή  $v$  μπορεί να σχεδόν-καλο-διαλυθεί, τότε το  $\overline{G[N(v)]}$  είναι υπο-ταιριαζόμενο.

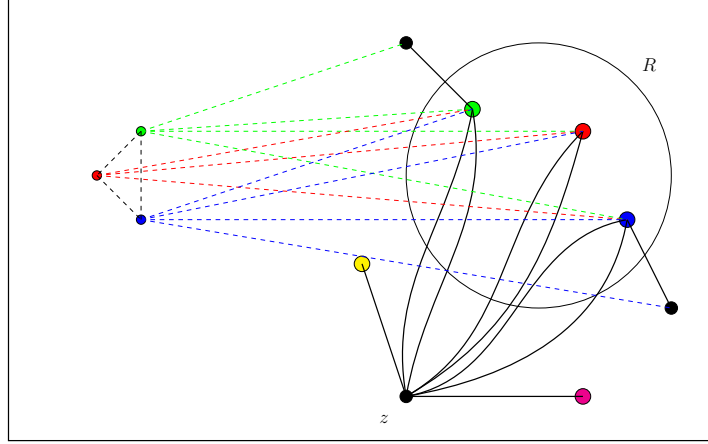
Ας μελετήσουμε λίγο την σύνδεση μεταξύ των δύο παραπάνω εννοιών σε πολυγραφήματα.

**Λήμμα 4.22.** Έστω  $t \geq 1$  και  $G'$  πολυγράφημα (όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.4) χωρίς θηλιές με σύνολο κορυφών  $V \cup \{z\}$  όπου  $z \notin V$  έτσι ώστε για κάθε  $u \in V$  η  $zu$  να είναι είτε απλή ακμή είτε ακμή με πολλαπλότητα 2. Ορίζουμε ως  $R$  το σύνολο των κορυφών που συνδέονται με την  $z$  με πολλαπλή ακμή.

Αν ισχύουν τα παρακάτω:

- $|V| - 2|R| \geq 3t$
- το  $G = G'[V]$  είναι απλό και δεν περιέχει εμβύθιση  $K_t$
- η  $z$  δεν μπορεί να καλό-συμπιεστεί ούτε να σχεδόν καλο-διαλυθεί στο  $G'$

τότε υπάρχει ένα σύνολο  $W \subseteq V$  τέτοιο ώστε  $|W| \leq t - 1$  και για κάθε  $u \in W$   $f_G(u) \leq |W| + |R|$ .



Σχήμα 4.4:  $G'$  πολυγράφημα

*Απόδειξη.* Ορίζουμε ένα βοηθητικό (απλό) γράφημα ως εξής. Για κάθε κορυφή  $v \in R$ , προσθέτουμε ένα αντίγραφο  $v_c$  στο  $H$  που θα έχει τους ακόλουθους γείτονες: όλες τις κορυφές του  $R$ , όλους τους γείτονες του  $v$  στο  $G$ . Ακόμη, συνδέουμε όλες τις κορυφές αντίγραφα με μεταξύ τους ακμές. Προφανώς, το  $H$  έχει ως σύνολο κορυφών το  $V \cup \{v_c | v \in R\}$  και σύνολο ακμών

$$E(H) = E(G) \cup \{u_c v | u, v \in R\} \cup \{u_c v_c | u, v \in R\} \cup \{v_c x | v \in R, vx \in E(G)\}.$$

Κάθε κορυφή στο  $H$  αντιστοιχεί σε μια ακμή του  $E_{G'}(z)$ , όπου κάθε αντίγραφο  $v_c$  αντιπροσωπεύει την πρόσδετη ακμή της πολυ-ακμής  $zv$ . Έστω  $\bar{H}$  το συμπλήρωμα του  $H$ . Θα δείξουμε ότι το  $\bar{H}$  δεν έχει τέλει ταιρίασμα ούτε είναι υπο-ταιριαζόμενο. Εάν το  $\bar{H}$  έχει τέλει ταιρίασμα, τότε από την κατασκευή του  $H$ , αυτό το ταιρίασμα αντιστοιχεί τις ακμές του  $E_{G'}(z)$  με τέτοιο τρόπο ώστε

- για κάθε ζεύγος  $\{zu_1, zu_2\}$ , ισχύει  $u_1 \neq u_2$  και  $u_1 u_2 \notin E(G')$  και
- για κάθε δύο ζεύγη  $\{zu_1, zu_2\}$  και  $\{zu'_1, zu'_2\}$  έχουμε  $\{u_1, u_2\} \neq \{u'_1, u'_2\}$ .

Έτσι η  $z$  μπορεί να καλο-διαλυθεί στο  $G'$ , που αντιφάσκει με την τρίτη υπόθεση του λήμματος.

Εάν το  $\bar{H}$  είναι υπο-ταιριαζόμενο, τότε για κάθε  $v \in V(H)$ , υπάρχει ένα τέλει ταιρίασμα του  $V(H) \setminus \{v\}$  στο  $\bar{H}$ . Μέσω του ίδιου επιχειρήματος προκύπτει ότι η  $z$  μπορεί να σχεδόν-καλο-διαλυθεί στο  $G'$ , που είναι αντίφαση. Συνεπώς το  $\bar{H}$  δεν έχει τέλει ταιρίασμα και δεν είναι υπο-ταιριαζόμενο. Παρατηρούμε ότι η αφαίρεση μιας κορυφής ενός πλήρους πολυμερούς γραφήματος με ελάχιστο βαθμό  $d$  οδηγεί σε ένα πλήρες πολυμερές γράφημα ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $d - 1$ . Ως εκ τούτου, αν υποθέσουμε ότι το  $H$  περιέχει ένα πολυμερές υπογράφημα ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $|R| + t$ . Αφαιρώντας όλες τις κορυφές αντίγραφα του  $H$ , προκύπτει το  $G$ , το οποίο εξακολουθεί να περιέχει ένα πλήρες πολυμερές υπογράφημα με ελάχιστο βαθμό τουλάχιστον  $(|R| + t) - |R| = t$ . Μέσω του Λήμματος 4.17, το  $G$  περιέχει το  $K_t$  ως εμβύδιση, άτοπο.

Καταλήγουμε ότι το  $H$  δεν περιέχει κανένα πολυμερές υπογράφημα ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $|R| + t$ . Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.18 στο  $H$ , αποκτούμε ξένα υποσύνολα  $W', L'$  του  $V(H)$  τέτοια ώστε:

- $|W'| \leq |R| + t - 1$  και  $|L'| \geq |V(H)| - 2|W'|$
- $f_H(v) \leq |W'|$  για κάθε  $v \in W'$  και
- $uv \in E(H)$  για κάθε  $u \in W'$  και  $v \in L'$ .

Έστω  $R_c$  το σύνολο των αντιγράφων του  $H$  και  $W = W' \setminus R_c$  και  $L = L' \setminus R_c$ . Θα δείξουμε ότι το  $W$  είναι το επιθυμητό σύνολο.

Ισχύει  $|L'| \geq |V(H)| - 2|W'| > (|V| + |R|) - 2(|R| + t) \geq |V| - |R| - 2t$ . Οπότε,  $|L'| - |R| \geq |V| - 2|R| - 2t$ . Ακόμη από την υπόθεση έχουμε ότι  $|V| - 2|R| \geq 3t$ , και έτσι  $|L| \geq |L'| - |R| \geq t$ . Επειδή  $uv \in E(H)$  για κάθε  $u \in W$  και  $v \in L$ , έπεται ότι  $uv \in E(G)$  για κάθε  $u \in W$  και  $v \in L$ . Αν  $|W| \geq t$ , τότε το  $G[W \cup L]$  περιέχει ένα πλήρες διμερές γράφημα με ελάχιστο βαθμό τουλάχιστον  $t$ , και έτσι από το Λήμμα 4.17 περιέχει μια εμβύδιση  $K_t$ , που είναι αντίφαση.

Επομένως,  $|W| \leq t - 1$ . Επίσης, αφού το  $G$  είναι εναγόμενο υπογράφημα του  $H$  θα ισχύει  $f_G(v) \leq f_H(v)$ . Άρα  $f_H(v) \leq |W'| \leq |W| + |R|$  για κάθε  $v \in W$ . Κι έτσι συμπληρώνεται η απόδειξη του λήμματος.  $\square$

**Ορισμός 4.23.** Καλούμε ένα γράφημα  $t$ -ανεπαρκές αν μπορεί να δημιουργηθεί από ένα γράφημα ελαχίστου βαθμού  $t$  αφαιρώντας ακμές.

**Λήμμα 4.24.** [13] Αν ένα γράφημα  $G$  ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $7t + 7$  δεν περιέχει μια εμβύδιση  $K_t$ , τότε το  $G$  περιέχει μια εμβύδιση ενός  $7t$ -ανεπαρκούς Οϊλεριανού γραφήματος  $G'$ .

**Λήμμα 4.25.** [13] Κάθε  $7t$ -ανεπαρκές Οϊλεριανό γράφημα περιέχει μια κορυφή βαθμού τουλάχιστον  $7t$ .

**Λήμμα 4.26.** Κάθε  $7t$ -ανεπαρκές Οϊλεριανό γράφημα περιέχει μια εμβύδιση  $K_t$ .

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα  $7t$ -ανεπαρκές απλό Οϊλεριανό γράφημα που δεν περιέχει εμβύδιση  $K_t$ . Έστω  $G = (V, E)$  τέτοιο γράφημα με το μικρότερο πλήθος κορυφών.

Έστω  $z_1$  μια κορυφή στο  $G$  για την οποία ισχύει  $d(z_1) \geq 7t$  (μια τέτοια κορυφή υπάρχει όπως μας εγγυάται το Λήμμα 4.25). Έστω  $1 \leq p < t$  ο μέγιστος ακέραιος ώστε να υπάρχει ένα διατεταγμένο σύνολο της μορφής  $A = (z_1, z_2, \dots, z_p)$  που να ικανοποιεί την:

$$\forall i \geq 2, f(z_i|B) \leq p + i + r_i, \quad (4.5)$$

όπου  $B = N(z_1) \setminus A$  και  $r_i = |\{j \leq i : z_j \notin N(z_1)\}|$  για κάθε  $i \geq 2$ . Δηλαδή το  $r_i$  είναι το πλήθος των  $\{z_2, \dots, z_i\}$  που δεν ανήκουν στην γειτονιά του  $z_1$ . Τέτοιος αριθμός  $p$  υπάρχει αφού η Σχέση 4.5 ισχύει τετριμμένα για  $A = \{z_1\}$ . Ακόμη, επειδή  $|N(z_1) \cap A| = p - r_p$ , θα ισχύει

$$|B| = |N(z_1) \setminus A| = d(z_1) - |N(z_1) \cap A| \geq 7t - p + r_p. \quad (4.6)$$

Έστω  $\bar{A} = V \setminus A$ . Ορίζουμε  $G_p = G$ , και ανυψώνουμε τις κορυφές  $z_p, z_{p-1}, \dots, z_1$  του  $A$  δημιουργώντας την ακολουθία γραφημάτων  $G_{p-1}, G_{p-2}, \dots, G_0$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι με την ανύψωση μιας κορυφής ενός  $t$ -ανεπαρκούς γραφήματος προκύπτει πάλι  $t$ -ανεπαρκές γράφημα, αφού στην διαδικασία διαγραφής ακμών τον ρόλο των μη-ανυψωμένων ακμών θα παίζει η καινούρια ακμή που προστίθεται.

Αν σε κάθε βήμα της παραπάνω επαναληπτικής διαδικασίας, μπορούσαμε να βρούμε το συμπλήρωμα ενός τέλειου ταιριάσματος στη  $N_{G_i}(z_i)$ , θα ανυψώναμε την  $z_i$  για να αποκτήσουμε το  $G_{i-1}$  διατηρώντας την ιδιότητα ότι το  $G_{i-1}$  είναι απλό. Ωστόσο, επειδή αυτή η απαίτηση ότι η  $N_{G_i}(z_i)$  έχει συμπλήρωμα ενός τέλειου ταιριάσματος είναι δύσκολη να αποδειχτεί, θα προσεγγίσουμε διαφορετικά τη διαδικασία. Για αυτό το λόγο, θα εισαγάγουμε παράλληλες ακμές στα γραφήματα  $G_i$  που θα ικανοποιούν μερικούς περιορισμούς.

Έστω  $q, 0 \leq q \leq p$  και πολυγραφήματα  $G_i, q \leq i \leq p$  που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

- (1)  $G_p = G$  και για όλα τα  $i, q \leq i < p$ , το  $G_i$  προκύπτει από το  $G_{i+1}$  συμπιέζοντας την  $z_{i+1}$ .
- (2) Για όλα τα  $i, q \leq i \leq p$ , το  $G_i[\bar{A}]$  είναι απλό.
- (3) Για όλα τα  $i$ , κάθε πολυ-ακμή του  $G_i$  που έχει άκρο στο  $\bar{A}$  έχει πολλαπλότητα δύο.
- (4) Για όλα τα  $j, 2 \leq j \leq q$ , υπάρχουν το πολύ  $r_p - r_q$  πολυ-ακμές μεταξύ των  $z_j$  και των κορυφών του  $\bar{A}$  στο  $G_q$  και το πολύ  $p - q$  πολυ-ακμές μεταξύ της  $z_1$  και του  $\bar{A}$ .
- (5) Υπάρχουν τουλάχιστον  $|\bar{A}| - p + q$  κορυφές στο  $\bar{A}$  που δεν γειτονεύουν με καμία πολυ-ακμή σε κανένα  $G_i, q \leq i \leq p$ .
- (6) Για δοσμένα  $v \in \bar{A}$  και  $z \in A$ , εάν η  $vz$  είναι πολυ-ακμή σε κάποιο  $G_i, q \leq i \leq p$ , τότε για κάθε  $z' \in A, z' \neq z$  και κάθε  $j, q \leq j \leq p$ , η  $vz'$  δεν είναι πολυ-ακμή στο  $G_j$ .

Διαλέγουμε τέτοια  $q$  και  $G_i, q \leq i \leq p$  ώστε να ελαχιστοποιείται το  $q$ . Τέτοιος αριθμός  $q$  και πολυ-γραφήματα  $G_i, q \leq i \leq p$  υπάρχουν τετριμμένα, αν παρατηρήσουμε ότι για  $q = p$  το  $G_p = G$  ικανοποιεί και τους έξι περιορισμούς καθώς το  $G$  είναι απλό.

Επιπλέον, ισχύει ότι  $q > 0$ , αλλιώς το γράφημα  $G_0$  δεν περιέχει εμβύδιση  $K_t$  αφού λόγω κατασκευής αποτελεί εμβύδιση στο  $G$ . Ακόμη, το  $G_0$  είναι απλό και για όλα τα  $v \in V(G_0), d_{G_0}(v) = d_G(v)$ . Οπότε το  $G_0$  είναι και Οϊλεριανό και  $t$ -ανεπαρκές, σε αντίθεση με την επιλογή του  $G$  ως το μικρότερο αντιπαράδειγμα.

Θεωρούμε τώρα το γράφημα  $G_q$  για το οποίο θα ισχύει (από την επιλογή του  $q$  ως μικρότερο δυνατό) ότι δεν μπορούμε να συμπίεσουμε την  $z_q$  για να αποκτήσουμε το  $G_{q-1}$  που να ικανοποιεί τους έξι περιορισμούς. Έστω  $X = N_{G_q}(z_q) \cap \bar{A}$ . Θα δείξουμε ότι το  $G' := G_q[X \cup \{z_q\}]$  ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του Λήμματος 4.22. Από τους Περιορισμούς 2 και 3 προκύπτει ότι το πολυγράφημα  $G'$  με σύνολο κορυφών  $V(G') = X \cup \{z_q\}$  δεν έχει θηλιές και για κάθε  $v \in X$ , η  $z_q v$  είτε είναι ακμή είτε πολυακμή με πολλαπλότητα δύο. Έστω  $R$  το σύνολο κορυφών του  $X$  που γειτονεύουν με την  $z_q$  με πολυακμή. Από τον Περιορισμό 4 έχουμε,

$$|R| = \begin{cases} \leq p - 1 & q = 1 \\ \leq r_p - r_q & q > 1 \end{cases}$$

**Ισχυρισμός 4.27.** Το  $G'$  ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του Λήμματος 4.22.

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Επαληθεύουμε μια μια τις υποθέσεις με τη σειρά.

- $|X| - 2|R| \geq 3t$ .

Παρατηρούμε ότι το  $|B \setminus X|$  είναι το πλήθος των κορυφών στο  $B$  που δεν γειτονεύουν με την  $z_q$  στο  $G_q$ . Δεδομένου ότι καμία ακμή μεταξύ της  $z_q$  και του  $B$  δεν έχει αφαιρεθεί κατά την διάλυση των  $z_p, \dots, z_{q+1}$ , το  $|B \setminus X|$  είναι το πολύ το πλήθος των κορυφών στο  $B$  που δεν είναι γειτονικές με την  $z_q$  στο  $G$ , Έτσι  $|B \setminus X| \leq f_G(z_q|B)$ . Από τη Σχέση 4.5 προκύπτει:

$$|B \setminus X| = 0, q = 1, |B \setminus X| \leq p + q + r_q, q > 1. \quad (4.7)$$

Εάν  $q > 1$ , ισχύει  $|X| \geq |B| - |B \setminus X| \geq (7t - p + r_p) - (p + q + r_q)$ , από τη Σχέση 4.6. Από το γεγονός ότι  $t \geq \max(p, q, r_p)$  και την Σχέση 4.2 έχουμε

$$|X| - 2|R| \geq 7t - 2p - q - r_p + r_q \geq 3t.$$

Στην περίπτωση που  $q = 1$ , ισχύει  $|X| \geq |B| - |B \setminus X| \geq |B| \geq 7t - p + r_p$ , από τη Σχέση 4.5. Ως εκ τούτου από τη Σχέση 4.2 έχουμε  $|X| - 2|R| \geq 7t - 3p + r_p \geq 3t$ .

- Το  $G'[X] = G_q[X]$  είναι απλό και δεν περιέχει εμβύδιση  $K_t$ .

Το  $G_q[X]$  είναι απλό από τον Περιορισμό 2 και δεν περιέχει εμβύδιση  $K_t$  από τον πρώτο περιορισμό και την υπόθεση ότι το  $G$  δεν περιέχει εμβύδιση  $K_t$ .

- Η  $z_q$  δεν μπορεί ούτε να καλο-διαλυθεί ούτε να σχεδόν-καλο-διαλυθεί στο  $G$ .

Ας υποθέσουμε ότι η  $z_q$  μπορεί να καλο-διαλυθεί στο  $G$ . Ανυψώνουμε όλες τις ακμές από την  $z_q$  στο  $X$ . Αφού  $X = N_{G_q}(z_q) \cap \bar{A}$ , ο αριθμός των ακμών που παραμένουν στο  $G_q$  και συνδέουν την  $z_q$  με το  $A$  είναι άρτιος. Έπειτα συμπιέζουμε την  $z_q$  στο  $G_q$  για να αποκτήσουμε το  $G_{q-1}$ . Δεδομένου ότι δεν δημιουργούμε νέα ακμή μεταξύ των  $A$  και  $\bar{A}$ , οι έξι περιορισμοί ικανοποιούνται, δηλαδή βρίσκουμε μικρότερο  $q - 1$ ,  $G_{q-1}$  και οδηγήθηκαμε σε άτοπο.

Έστω ότι η  $z_q$  μπορεί να σχεδόν-καλο-διαλυθεί στο  $G$ . Επιλέγουμε τυχαία μια κορυφή  $v \in X$  που δεν γειτονεύει με καμία πολυ-ακμή στο  $G_i$ , για όλα τα  $q \leq i \leq p$ . Τέτοια κορυφή  $v$  όντως υπάρχει γιατί από τον Περιορισμό 5 υπήρχαν το πολύ  $p - q$  κορυφές του  $\bar{A}$  που συνδέονται με κάποια πολυ-ακμή σε όλο το  $G_i$ ,  $q \leq i \leq p$ , ενώ  $|X| \geq 3t > p - q$ .

Από το γεγονός ότι η  $z_q$  μπορεί να σχεδόν-καλο-διαλυθεί στο  $G$ , αφού αφαιρέσουμε την ακμή  $z_q v$  στο  $G'$  καλο-διαλύουμε την  $z_q$ . Ο βαθμός  $d_{G_q}(z_q)$  είναι άρτιος άρα η  $z_q$  είναι γειτονική με μια κορυφή  $z_s$  όπου  $s < q$ . Επιλέγοντας το μικρότερο δυνατό  $s$  ανυψώνουμε το μονοπάτι  $z_s z_q v$ . Στη συνέχεια, συμπιέζουμε την  $z_q$  στο  $G_q$  αποκτώντας το  $G_{q-1}$ . Το  $G_{q-1}$  ικανοποιεί τετριμμένα τους δύο πρώτους περιορισμούς. Η μόνη πιθανή νέα πολυ-ακμή που έχει δημιουργηθεί είναι η  $z_s v$ . Επειδή η  $v$  δεν είναι γειτονική με καμία πολυ-ακμή στο  $G_i$  για όλα τα  $q \leq i \leq p$ , οι Περιορισμοί 3, 5 και 6 επαληθεύονται για το  $G_{q-1}$ . Μένει να αποδείξουμε τον Περιορισμό 4 ο οποίος ισχύει στην περίπτωση που  $z_s = z_1$ . Εάν  $z_s \neq z_1$ , τότε από την επιλογή του  $s$ , η  $z_1$  δεν γειτονεύει με την  $z_q$  και άρα  $r_{q-1} = r_q - 1$ . Έτσι,  $r_p - r_{q-1} = r_p - r_q + 1$  και επομένως μέσω της Σχέσης 4.2 επαληθεύεται και ο Περιορισμός 4.

Συνεπώς, το  $G'$  ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του Λήμματος 4.22. △

Από τον προηγούμενο ισχυρισμό, το  $G'$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 4.22, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο  $W \subseteq X$  έτσι ώστε  $f_{G_q[X]}(v) \leq |W| + |R|$  για κάθε  $v \in W$  και  $|W| \leq t - 1$ .

**Ισχυρισμός 4.28.**  $f_G(v|B) \leq |W| + 2p + r_p$  για κάθε  $v \in W$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Παρατηρούμε ότι  $f_{G_q}(v|X) = f_{G_q[X]}(v)$  για κάθε  $v \in X$ , οπότε  $f_{G_q}(v|B) \leq f_{G_q}(v|X) + f_{G_q}(v|B \setminus X) \leq (|W| + |R|) + |B \setminus X|$ .

Εάν  $q > 1$ , από τη Σχέση 4.7  $|B \setminus X| \leq p + q + r_q$  και τη Σχέση 4.2  $|R| \leq r_p - r_q$ . Επομένως  $f_{G_q}(v|B) \leq (|W| + r_p - r_q) + (p + q + r_q) \leq |W| + p + q + r_p$ .

Εάν  $q = 1$ , από τη Σχέση 4.7  $|B \setminus X| = 0$  και από τη Σχέση 4.2  $|R| \leq p - 1$ . Έτσι έχουμε  $f_{G_q}(v|B) \leq |W| + p < |W| + p + q + r_p$ . Επομένως συνεπάγεται ότι

$$\forall v \in X, f_{G_q}(v|B) \leq |W| + p + q + r_p.$$

Σταθεροποιούμε μια  $v \in X$ . Από τον περιορισμό 6, υπάρχει μια τιμή  $s$  έτσι ώστε η  $z_i v$  να μην είναι πολυ-ακμή στο  $G_i$  για κάθε  $i \neq s, q \leq i \leq p$ . Άρα, υπάρχει το πολύ μια ακμή  $z_i v$  στο  $G_i$  και έτσι όταν συμπιέσουμε την  $z_i$  για να αποκτήσουμε το  $G_{i-1}$ , προσθέτουμε το πολύ μια ακμή μεταξύ  $v$  και  $B$  στο  $G_{i-1}$ . Εάν  $s > q$ , τότε από τον Περιορισμό 3 υπάρχουν το πολύ δύο ακμές  $z_s v$  στο  $G_s$ . Ως εκ τούτου, συμπιέζοντας την  $z_s$  στο  $G_s$  αποκτούμε το  $G_{s-1}$  έχοντας προσθέσει το πολύ δύο ακμές μεταξύ  $v$  και  $B$  στο  $G_{s-1}$ . Οπότε αφού  $G = G_p$ , συμπιέζοντας τις  $z_p, \dots, z_{q+1}$  δημιουργούμε το  $G_q$ , προσθέτοντας συνολικά το πολύ  $p - q - 1 + 1 = p - q$  ακμές από τη  $v$  στο  $B$ , και επομένως

$$f_G(v|B) = f_{G_p}(v|B) \leq f_{G_q}(v|B) + (p - q).$$

Συνεπώς,

$$f_G(v|B) = f_{G_p}(v|B) \leq f_{G_q}(v|B) + (p - q) \leq |W| + p + q + r_p + p - q = |W| + 2p + r_p.$$

△

**Ισχυρισμός 4.29.**  $|W| \geq t - p$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Ας υποθέσουμε (προς άτοπο) ότι  $|W| + p = p^* < t$ . Ορίζουμε  $A^* = A \cup W$  όπου τα στοιχεία στο  $W$  απαριθμούνται ως εξής  $\{z_{p+1}, \dots, z_{p^*}\}$ , και  $B^* = N(z_1) \setminus A^* = B \setminus W$ . Ισχύουν τα εξής:

- $\forall i, 2 \leq i \leq p, f_G(z_i|B^*) \leq f_G(z_i|B) \leq p + i + r_i \leq p^* + i + r_i$ .
- $\forall i > p, f_G(z_i|B^*) \leq f_G(z_i|B) \leq |W| + 2p + r_p = p^* + p + r_p \leq p^* + i + r_i$  αφού εξ' ορισμού η  $r$  δεν είναι φθίνουσα συνάρτηση, άρα για  $p < i \rightarrow r_p < r_i$ .

Οπότε η Σχέση 4.5 επαληθεύεται για τα  $p^*, A^*$  άρα βρήκαμε  $p^* > p$  ενώ το  $p$  ήταν το μέγιστο δυνατό, καταλήγοντας σε άτοπο. Έτσι  $|W| \geq t - p$ . △

Έστω  $\hat{A}$  τυχαίο σύνολο κορυφών  $t - p$  στο  $W$  και η απαρίθμηση τους  $z_{p+1}, \dots, z_t$ . Ορίζουμε  $M = A \cup \hat{A}$ ,  $\overline{M} = B \setminus \hat{A}$ ,  $U = M \cup \overline{M}$  και  $H = G[U]$ . Σκοπός μας είναι να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι δηλαδή το  $H$  περιέχει μια εμβύδιση  $K_t$  μέσω του τελευταίου ισχυρισμού. Αρχικά, παρατηρούμε ότι  $f_H(z_i|\overline{M}) = f_G(z_i|\overline{M}) \leq f_G(z_i|B)$  για κάθε  $i, 1 \leq i \leq p$ . Ακόμη, επειδή  $f_G(z_1|B) = 0$  και  $f_G(z_i|B) \leq 2p + i$  για κάθε  $i, 1 < i \leq p$  και με βάση τον Ισχυρισμό 4.28 προκύπτει  $f_G(z_i|B) \leq |W| + 2p + r_p \leq t + 2p + r_p$  για κάθε  $i, p < i \leq t$ . Έτσι,

$$\forall i \leq p, f_H(z_i|\overline{M}) \leq 2p + i, \forall i > p, f_H(z_i|\overline{M}) \leq t + 2p + r_p. \quad (4.8)$$

Επιπλέον  $|M| = t$  και από τη Σχέση 4.6,  $|\overline{M}| \geq |B| - |\hat{A}| \geq 7t - p + r_p - (t - p) = 6t + r_p$ .

**Ισχυρισμός 4.30.** Το  $H$  περιέχει μια εμβύδιση  $K_t$ .

*Απόδειξη ισχυρισμού.* Θεωρούμε δύο περιπτώσεις.

(1)  $p \leq \frac{t}{2}$ .

Ισχύει  $f_H(z_i|M) \leq |M| \leq t$  για κάθε  $z_i$ , και έτσι

$$\begin{aligned} \sum_{z_i \in M} f_H(z_i) &\leq \sum_{z_i \in M} f_H(z_i|M) + \sum_{z_i \in M} f_H(z_i|\overline{M}) \\ &\leq t^2 + \sum_{1 \leq i \leq p} f_H(z_i|\overline{M}) + \sum_{p < i \leq t} f_H(z_i|\overline{M}) \\ &\leq t^2 + \sum_{i \leq p} (2p + i) + \sum_{p < i \leq t} (t + 2p + r_p) \\ &\leq t^2 + 3p^2 + (t - p)(t + 3p) \leq 2t^2 + 2tp \leq 3t^2. \end{aligned}$$



Επειδή  $2p \leq t$ , έχουμε

$$\max_{z_i \in M} f_H(z_i) \leq t + \max_{z_i \in M} f_H(z_i | \overline{M}) \leq t + (t + 2p + r_p) \leq 3t + r_p.$$

Ακόμη,  $|U| = |M| + |\overline{M}| \geq 7t + r_p$ . Επομένως,

$$\sum_{z_i \in M} f_H(z_i) \leq 3t^2 \leq \left( |U| - t - \max_{z_i \in M} f_H(z_i) \right) t.$$

Τέλος, εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.16 αποκτούμε μια εμβύδιση  $K_t$  στο  $H$ , άτοπο.

(2)  $p > \frac{t}{2}$ .

Θέτουμε  $s = |\hat{A}| = t - p$ , δηλαδή  $p > s$ . Παρόλο που το  $\sum_{z_i \in M} f_H(z_i)$  είναι μικρό, το  $\max_{z_i \in M} f_H(z_i)$  μπορεί να είναι πολύ μεγάλο και έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.16.

Θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο, τον  $Main(H')$  ο οποίος βρίσκει ποιες ανυψώσεις ακμών να κάνει σε κάθε βήμα καταλήγοντας στο τέλος σε μια εμβύδιση  $K_t$ . Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πολυγράφημα χωρίς θηλιές  $H$  με σύνολο κορυφών  $U$  και έστω δύο κορυφές  $z_i, z_j \in M$ . Ορίζουμε μια υπορουτίνα που θα χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος, την  $Link(H', z_i, z_j)$ , ως εξής: η υπορουτίνα βρίσκει κορυφή  $w \in \overline{M}$  έτσι ώστε  $z_i w, w z_j \in E(H')$  και έπειτα ανυψώνει το μονοπάτι  $z_i w z_j$  αποκτώντας τη νέα ακμή  $z_i z_j$ . Στη συνέχεια επιστρέφει το  $H'$  όπως έχει διαμορφωθεί μετά την ανύψωση. Μια τέτοια κορυφή  $w$  μπορεί να βρεθεί ελέγχοντας όλες τις πιθανές επιλογές για την  $w$ . Αν υπάρχουν παραπάνω από μια επιλογές, η υπορουτίνα επιλέγει μια τυχαία. Για την ομαλή εκτέλεση της  $Link(H', z_i, z_j)$  αρκεί να υποθέσουμε ότι η είσοδος ικανοποιεί την:

$$f_{H'}(z_i | \overline{M}) + f_{H'}(z_j | \overline{M}) < 6t + r_p \leq |\overline{M}|. \quad (4.9)$$

Εάν υπάρχει τέτοια κορυφή  $w \in \overline{M}$ , η υπορουτίνα τερματίζει. Ας παρατηρήσουμε ακόμη ότι μετά την εκτέλεση της  $Link(H', z_i, z_j)$ , οι  $z_i, z_j$  είναι γειτονικές και η είσοδος  $H'$  θα περιέχει το γράφημα-έξοδος ως εμβύδιση.

Παρουσιάζουμε τώρα τον αλγόριθμο  $Main(H')$  που με τις ανυψώσεις δημιουργεί ένα πλήρες γράφημα  $M = A \cup \hat{A}$ . Ξεκινάμε με  $H' := H$ . Ο αλγόριθμος αποτελείται από τρεις φάσεις. Στη 1<sup>η</sup> φάση, συνδέουμε όλες τις κορυφές μεταξύ του  $\{z_{s+1}, \dots, z_p\}$  και  $\hat{A}$ . Ουσιαστικά ο αλγόριθμος καλεί την  $Link(H', z_i, z_j)$  όσο  $j > s$ . Οι μεταβλητές έχουν αρχικές τιμές  $j = p$  και  $i = p + 1$  με το  $i$  να αυξάνεται κατά ένα και το  $j$  να μειώνεται κατά ένα, ωστόσο  $i \leq t$ .

Στη 2<sup>η</sup> φάση, συνδέουμε κάθε ζεύγος κορυφών  $\{z_1, \dots, z_s\}$  και  $\hat{A}$  με πολυακμές πολλαπλότητας δύο. Εικότερα ο αλγόριθμος καλεί την  $Link(H', z_i, z_j)$  όσο  $j \geq 1$ . Οι μεταβλητές έχουν αρχικές τιμές  $j = s$  και  $i = p + 1$  με το  $i$  να αυξάνεται κατά ένα και το  $j$  να μειώνεται κατά ένα, ωστόσο  $i \leq t$ . Κι έτσι αποκτούμε δύο διμερή πλήρη ακμο-διακεκριμένα υπογραφήματα, το ένα μεταξύ  $A$  και  $\hat{A}$  και το άλλο μεταξύ  $\{z_1, \dots, z_s\}$  και  $\hat{A}$ .

Στη 3<sup>η</sup> φάση, συνδέουμε όλες τις κορυφές του  $A$  δημιουργώντας ένα πλήρες γράφημα στο  $M$ . Πιο συγκεκριμένα ο αλγόριθμος καλεί την  $Link(H', z_i, z_j)$  όσο  $j \geq 1$ . Οι μεταβλητές έχουν αρχικές τιμές  $j = p$  και  $i = j - 1$  με το  $i$  να αυξάνεται κατά ένα και το  $j$  να μειώνεται κατά ένα, ωστόσο  $i \geq 1$ .

Όπως αναλύσαμε, η έξοδος του αλγορίθμου  $Main(H')$  αποτελείται από δύο διμερή πλήρη υπογραφήματα, τα  $H_1$  μεταξύ των  $A$  και  $\hat{A}$  και  $H_2$  μεταξύ των  $\{z_1, \dots, z_s\}$  και  $\hat{A}$  και ένα πλήρες γράφημα  $H_3$  στο  $A$ . Αφού  $|\hat{A}| = s$ , μπορούμε να χρωματίσουμε τις ακμές ενός πλήρους γραφήματος στο  $\hat{A}$  με  $s$  χρώματα  $\{1, 2, \dots, s\}$  με τέτοιο τρόπο ώστε οποιεσδήποτε δύο ακμές να έχουν διαφορετικό χρώμα. Ακόμη, για κάθε ακμή  $z_i z_j$  με χρώμα  $c$ , όπου  $z_i, z_j \in \hat{A}$ , ανυψώνουμε τις ακμές  $z_i z_c z_j$  στο πλήρες διμερές γράφημα  $H_2$  αποκτώντας το πλήρες γράφημα  $H_4$  στο  $\hat{A}$ . Συνεπώς, το  $H_1 \cup H_3 \cup H_4$  είναι ένα πλήρες γράφημα στο  $M$ . Άρα, η έξοδος  $H'$  του αλγορίθμου περιέχει μια εμβύδιση  $K_t$ , που σημαίνει ότι το  $H$  περιέχει επίσης μια εμβύδιση  $K_t$ , άτοπο.

Τέλος, θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος  $Main(H')$  όντως εκτελείται σωστά, δηλαδή θα επαληθεύσουμε ότι η Σχέση 4.9 ικανοποιείται σε κάθε κλήση της υπορουτίνας  $Link(H', z_i, z_j)$ . Για λόγους συντομίας θα παραλείπουμε τον δείκτη  $H'$  της  $f$ . Παρατηρούμε ότι μετά την εκτέλεση της  $Link(H', z_i, z_j)$ , τα  $f(z_i|\overline{M})$  και  $f(z_j|\overline{M})$  αυξάνονται το πολύ κατά 1.

Ας ασχοληθούμε με το βήμα  $(j, i)$  της 1<sup>ης</sup> φάσης:

Η κορυφή  $z_j$  έχει συνδεθεί  $i - p - 1$  φορές και έτσι από την 4.8,  $f(z_j|\overline{M}) < p + j + i$ , αντίστοιχα η  $z_i$  έχει συνδεθεί  $p - j - 1$  φορές οπότε  $f(z_i|\overline{M}) < t + 3p + r_p - j$ . Άρα  $f(z_j|\overline{M}) + f(z_i|\overline{M}) < t + 4p + i + r_p \leq 6t + r_p$ , και έτσι η 4.9 ισχύει για κάθε βήμα  $(j, i)$  της 1<sup>ης</sup> φάσης. Οπότε, στο τέλος της 1<sup>ης</sup> φάσης ισχύει:

$$f(z_j|\overline{M}) \leq 2p + j$$

εάν  $s \leq q$ ,

$$f(z_j|\overline{M}) \leq (2p + j) + s$$

εάν  $s < j \leq p$ ,

$$f(z_i|\overline{M}) \leq (t + 2p + r_p) + (p - s)$$

εάν  $i > p$ .

Στη συνέχεια εξετάζουμε το βήμα  $(j, i)$  της  $2^{ns}$  φάσης: Η κορυφή  $z_j$  έχει συνδεθεί  $2(i - p - 1)$  φορές, οπότε

$$f(z_j|\overline{M}) \leq 2p + j + 2s - 2 = 2t + j - 2$$

και η  $z_i$  έχει συνδεθεί  $2(s - j - 1)$  φορές. Δηλαδή,

$$f(z_i|\overline{M}) \leq 2t + 2p + r_p - 2j - 2.$$

Επομένως,  $f(z_j|\overline{M}) + f(z_i|\overline{M}) \leq 4t + 2p + r_p - j - 4 \leq 6t + r_p - 4$ . Στο τέλος της  $2^{ns}$  φάσης, έχουμε:

$$f(z_j|\overline{M}) \leq (2p + j) + 2s \leq 2t + j$$

εάν  $j \leq s$ ,

$$f(z_j|\overline{M}) \leq (2p + j) + s \leq 2t + j$$

εάν  $s < j \leq p$ .

Τέλος, μελετούμε το βήμα  $(j, i)$  της  $3^{ns}$  φάσης:

Η κορυφή  $z_j$  έχει συνδεθεί  $(p-j)+(j-i-1)$  (στις οποίες  $p-j$  φορές συνδέεται με την  $z_r$ ,  $j < r \leq p$  και  $j-i-1$  φορές με την  $z_{i'}$ ,  $i < i' \leq j$ ) και έτσι  $f(z_j|\overline{M}) < (2t+j)+p-i$ , ενώ η  $z_i$  έχει συνδεθεί  $p-j-1$  φορές, άρα

$$f(z_i|\overline{M}) < (2t+i) + p - j.$$

Συνεπώς,

$$f(z_j|\overline{M}) + f(z_i|\overline{M}) < 4t + 2p \leq 6t + r_p.$$

Ως εκ τούτου, η Σχέση 4.9 ισχύει για κάθε βήμα  $(j, i)$  της  $3^{ns}$  φάσης, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του ισχυρισμού.  $\triangle$

Η ιδέα της απόδειξης συνοπτικά: Εάν το  $G$  είχε λίγες ακμές, όπως δείξαμε, θα μπορούσαμε να καλο-διαλύσουμε κάποια κορυφή του  $G$  ώστε να πάρουμε μικρότερο αντιπαράδειγμα, που οδηγεί σε άτοπο. Ως εκ τούτου, το  $G$  έχει πολλές ακμές και γι' αυτό βρίσκουμε δύο ξένα σύνολα κορυφών  $A$  και  $B$  μεγέθους περίπου  $t$  και  $6t$ , αντίστοιχα, έτσι ώστε να υπάρχουν πολύ λίγες ακμές μεταξύ τους. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.16 αποκτούμε μια εμβύδιση  $K_t$  και έτσι καταλήγουμε σε αντίφαση.  $\square$

**Θεώρημα 4.31.** Κάθε απλό γράφημα ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $7t+7$  περιέχει μια (ασθενή) εμβύδιση  $K_t$ .

*Απόδειξη.* Το Θεώρημα 4.31 έπεται από το Λήμμα 4.26. Ας υποθέσουμε (προς άτοπο) ότι υπάρχει ένα γράφημα  $G$  ελαχίστου βαθμού τουλάχιστον  $7t+7$  που δεν έχει εμβύδιση  $K_t$ . Με βάση το Λήμμα 4.24 [13] το  $G$  θα περιέχει μια εμβύδιση ενός  $7t$ -ανεπαρκούς Οϊλεριανού γραφήματος  $G'$ . Από το Λήμμα 4.26, το  $G'$  περιέχει μια εμβύδιση  $K_t$ , καταλήγοντας σε άτοπο.  $\square$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, εξετάσαμε τη σχέση που συνδέει τα πλήρη γραφήματα με τις εμβύθισεις, παρουσιάσαμε την εικασία κατά την οποία κάθε απλό γράφημα ελάχιστου βαθμού τουλάχιστον  $d(t) = t - 1$  περιέχει μια εμβύθιση  $K_t$ .

Η εικασία ισχύει τετριμμένα για  $t \leq 4$ . Αναλύθηκε η απόδειξη ότι η εικασία αληθεύει και για τις τιμές  $t \in \{5, 6, 7\}$ . Επιπλέον, παρουσιάστηκε η απόδειξη ότι η εικασία δεν αληθεύει για τις τιμές  $t \in \{8, 9, 11\}$ . Όσον αφορά την τιμή  $t = 10$ , το αντιπαράδειγμα του Seymour διαψεύδει την εικασία ενώ υποδεικνύει ότι  $d(t) \geq t$  για τις τιμές  $t \geq 10$ . Τέλος, μελετήθηκαν δύο γνωστά άνω φράγματα για την συνάρτηση  $d(t)$ , από τα οποία συμπεραίνουμε ότι για τις τιμές  $t \geq 8$  ισχύει ότι  $t - 1 \leq d(t) \leq 7t + 7$ .

Θα κλείσουμε παραδέτοντας τρία ερωτήματα που έπονται όλης αυτής της μελέτης και προέκυψαν από τις Collins και Heenean [7]. Τα παραδείγματα των γραφημάτων που παρουσιάστηκαν χωρίς εμβύθιση  $K_t$ , έχουν ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  και  $(t - 2)$ -ακμο-συνεκτικότητα για τις τιμές  $t \geq 9$ .

(1) Ο χρωματικός αριθμός των γραφημάτων που βρέθηκε είναι  $t - 2$ . Υπάρχουν άραγε γράφημα χωρίς εμβύθιση  $K_t$  με ελάχιστο βαθμό  $t - 1$  και χρωματικό αριθμό  $t - 1$ ;

(2) Υπάρχουν  $t$ -εξέδρες με περισσότερες από  $t + 1$  κορυφές και αν ναι, πώς μοιάζουν;

(3) Πρέπει τα γράφημα με μεγάλη ακμο-συνεκτικότητα να έχουν απαραίτητα μια εμβύθιση μεγάλης κλίμακας;

Κάτι τέτοιο δεν θα έριχνε φως στην εικασία των Abu-Khizam και Langston, δεδομένου ότι τα γράφημα με μεγάλο χρωματικό αριθμό μπορεί να έχουν μικρή ακμο-συνεκτικότητα, αλλά μπορεί να φανεί χρήσιμο στην προσπάθεια να καταλάβουμε τη δομή ενός γραφήματος που περιέχει εμβύθιση μεγάλης κλίμακας.



1.1	Εμβύδιση ανυψώνοντας τις ακμές $cd, de$ . . . . .	8
2.1	Αντιπαράδειγμα $G'$ όπου $\deg(v) > d$ προς απόδειξη ύπαρξης εμβύδισης $K_{d+1}$ . . . . .	13
2.2	Αντιπαράδειγμα $G'$ όπου $\deg(v^*) = d + 2$ προς απόδειξη ύπαρξης εμβύδισης $K_{d+1}$ . . . . .	13
2.3	Αντιπαράδειγμα $G'$ όπου $ N(u) $ όχι κλίκα, προς απόδειξη ύπαρξης εμβύδισης $K_{d+1}$ . . . . .	14
2.4	Αντιπαράδειγμα $G'$ όπου $ N(u)  = 1$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύδισης $K_{d+1}$ . . . . .	14
2.5	Αντιπαράδειγμα $G'$ όπου $ N(u)  = 2$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύδισης $K_{d+1}$ . . . . .	15
2.6	Αντιπαράδειγμα $G'$ όπου $ N(u)  = d - 1$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύδισης $K_{d+1}$ . . . . .	16
2.7	Επεκτείνοντας την εμβύδιση $K_6$ όταν $ N(u)  = 3$ . . . . .	16
2.8	Επεκτείνοντας την εμβύδιση $K_7$ όταν $ N(u)  = 4$ . . . . .	17
2.9	1 <sup>η</sup> περίπτωση Ισχυρισμού 2.12 . . . . .	19
2.10	2 <sup>η</sup> περίπτωση Ισχυρισμού 2.12 . . . . .	19
2.11	3 <sup>η</sup> περίπτωση Ισχυρισμού 2.12 . . . . .	20
2.12	4 <sup>η</sup> περίπτωση Ισχυρισμού 2.12 . . . . .	20
2.13	Εμβύδιση $K_7$ στο $G'$ . . . . .	21
2.14	Αντιπαράδειγμα $G'$ όπου $v_1w_1, v_2w_2 \notin E$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύδισης $K_7$ . . . . .	22
2.15	Αντιπαράδειγμα $G''$ όπου $v_1w_1, v_1w_2 \notin E$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύδισης $K_7$ . . . . .	22
2.16	Αντιπαράδειγμα $G'''$ όπου $v_1w_2, v_1w_3, v_2w_2, v_2w_3 \in E$ , προς απόδειξη ύπαρξης εμβύδισης $K_7$ . . . . .	23
2.17	Τελικό αντιπαράδειγμα $G'$ . . . . .	23
3.1	Μια 8-εξέδρα $P_8$ και ένα $G_8$ . . . . .	30
3.2	Μία $t$ -εξέδρα $P_t$ όπου $t$ περιττός . . . . .	31
3.3	Ένα $G_9^4$ σχηματισμένο προσθέτοντας 3 αντίγραφα $P_9$ σε κάθε αποβάθρα . . . . .	33
3.4	Ένα 5-συνεκτικό $P_t^5$ όπου $t$ περιττός . . . . .	33

3.5	Γράφημα με ελάχιστο βαθμό 9 που δεν περιέχει εμφύδιση $K_{10}$ . . .	36
4.1	$K_{a,b}$ . . . . .	40
4.2	Γράφημα $G$ . . . . .	41
4.3	Οϊλεριανό γράφημα $G$ . . . . .	43
4.4	$G'$ πολυγράφημα . . . . .	51



- [1] F. N. ABU-KHZAM AND M. A. LANGSTON, *Graph colouring and the immersion order*, International Computing and Combinatorics Conference, Springer Berlin Heidelberg, (2003), 394-403.
- [2] T. ANDREAEE, *On self-immersions of infinite graphs*, J. Graph Theory 58, 4, (2008), 275-285.
- [3] H. D. BOOTH, R. GOVINDAN, M. A. LANGSTON AND S. RAMACHANDRAMURTHIS, *Sequetial and parallel algorithms for  $K_4$ -immersion testing*, J. Algorithms 30, (1999), 344-378.
- [4] P. A. CATLIN, *A bound on the chromatic number of a graph*, Discrete Math 22, (1978), 81-83.
- [5] P. A. CATLIN, *Hajòs Graph-Coloring Conjecture: Variations and Counterexamples*, J. Combin. Theory Ser. B 26, (1979), 268-274.
- [6] M. CHUDNOVSKY, A. FRADKIN AND P. SEYMOUR, *Tournament immersion and cutwidth*, J. Combin. Theory Ser. B 102, (2012), 93-101.
- [7] KAREN L. COLLINS AND MEGAN E. HEENEHAN, *Constructing graphs with no immersion of large complete graphs*, J. Graph Theory 77, (2014), 1-18.
- [8] M. DeVos, Z. DVOŘÁK, J. FOX, J. McDONALD, B. MOHAR AND D. SCHEIDE, *A minimum degree condition forcing complete graph immersion*, Combinatorica 20, (2011).
- [9] M. DeVos, K. KAWARABAYASHI, B. MOHAR AND H. OKAMURA, *Immersing small complete graphs*, Ars Mathematica Contemporanea, (2010).
- [10] M. DeVos, J. McDONALD, B. MOHAR AND D. SCHEIDE, *Immersing complete digraphs*, European J. Combin. 33, (2012), 1294-1302.
- [11] F. R. DIESTEL, *Graph theory*, Springer Publishing Company, Incorporated, (2018).

- [12] G. A. DIRAC, *A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs*, J. London Math. Soc. 27, (1952), 85-92.
- [13] Z. DVOŘÁK AND L. YEPREMYAN, *Complete graph immersions and minimum degree*, J. Graph Theory 88, (2018), 211-221.
- [14] P. ERDŐS AND S. FAJTLÓWICZ, *On the conjecture of Hajós*, Combinatorica 1, (1981), 141-143.
- [15] M. R. FELLOWS AND M. A. LANGSTON, *Nonconstructive tools for proving polynomial-time decidability*, J. ACM 35, (1998), 727-738.
- [16] M. FERRARA, R. J. GOULD, G. TANSEY AND T. WHALEN, *On  $H$ -immersions*, J. Graph Theory 57, 3, (2008), 245-254.
- [17] G. GAUTHIER, T.-N. LE AND P. WOLLAN, *Forcing clique immersions through chromatic number*, European Journal of Combinatorics 81, (2019), 98-118.
- [18] R. GOVINDAN, S. RAMACHANDRAMURTHI, *A weak immersion relation on graphs and its applications*, Discrete Math. 230, (2001), 189-206.
- [19] M. GROHE, K. KAWARABAYASHI, D. MARX AND P. WOLLAN, *Finding topological subgraphs is fixed-parameter tractable*, Conference STOC '11, (2011), 479-488.
- [20] H. HADWIGER, *Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe*, Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich 88, (1943), 133-142.
- [21] K. KAWARABAYASHI AND B. TOFT, *Any 7-chromatic graph has  $K_7$  or  $K_{4,4}$  as a minor*, Combinatorica 25, (2005), 327-353.
- [22] F. LESCURE AND H. MEYNIEL, *On a problem upon configurations contained in graphs with given chromatic number*, Graph theory in memory of G. A. Dirac, (1989), 325-331.
- [23] L. LOVÁSZ, *Graph minor theory*, Bulletin of the American Mathematical Society, (2006), 75-86.
- [24] C. ST. J. A. NASH-WILLIAMS, *Edge-disjoint spanning trees of finite graphs*, J. London Math. Soc. 36, (1961), 445-450.
- [25] N. ROBERTSON AND P. D. SEYMOUR, *Graph Minors. XIII. The Disjoint Paths Problem*, J. Combin. Theory Ser. B 63, (1995), 65-110.
- [26] N. ROBERTSON AND P. D. SEYMOUR, *Graph Minors. XVI. Excluding a non-planar graph*, J. Combin. Theory Ser. B 89, (2003), 43-76.
- [27] N. ROBERTSON AND P. D. SEYMOUR, *Graph minors. XX. Wagner's conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B 92, (2004), 325-357.
- [28] N. ROBERTSON, P. D. SEYMOUR AND R. THOMAS, *Hadwiger's conjecture for  $K_6$ -free graphs*, Combinatorica 13, (1993), 279-361.

- [29] P. SEYMOUR, *Hadwiger's conjecture*, Open problems in mathematics, Springer International Publishing, (2016).
- [30] C. THOMASSEN, *Some remarks on Hajòs' conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B 93, (2005), 95-105.
- [31] K. WAGNER, *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*, Math. Ann. 114, (1937), 570-590.
- [32] P. WOLLAN, *The structure of graphs not admitting a fixed immersion*, J. Combin. Theory Ser. B 110, (2015), 47-66.